מבוא לטופולוגיה

משה קמנסקי

17 במרץ 2026

1 מבוא

1.1 מרחבים מטריים ומרחבים טופולוגיים

המטרה של טופולוגיה היא ליצור מושג כללי למדי של "מרחב", ולחקור את התכונות הגסות של מרחבים כאלה. נזכיר שכבר יש לנו מושג די כללי של מרחב:

הגדרה 1.1.1. *מטריקה* על קבוצה X היא פונקציה $d:X\times X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימת לכל $x,y\in X$: מטריקה

1. $d(x,y)=0$ אם ורק אם $x=y$.
2. $d(x,y)=d(y,x)$
3. (אי שוויון המשולש) $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$ לכל $z\in X$.

זוג $\langle X,d\rangle$ כאשר X קבוצה ו-d מטריקה על X נקרא *מרחב מטרי*. מרחב מטרי

זוהי הכללה טבעית של מושג המרחק במרחב האוקלידי, ולמרות שזו הכללה די רחבה, היא לא מספיק כללית עבורנו. אנחנו נעבוד במקום זה עם מרחבים מהסוג הבא:

הגדרה 1.1.2. *טופולוגיה* על קבוצה X מורכבת מקבוצה $\mathcal{T}$ של תתי-קבוצות של X כך ש: טופולוגיה

1. אם $Y,Z\in\mathcal{T}$ אז גם $Y\cap Z\in\mathcal{T}$
2. אם $C\subseteq\mathcal{T}$ אז $\bigcup C\in\mathcal{T}$
3. $X\in\mathcal{T}$

זוג $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ כאשר X קבוצה ו-$\mathcal{T}$ טופולוגיה על X נקרא *מרחב טופולוגי*. קבוצה ב-$\mathcal{T}$ נקראת *קבוצה פתוחה* של המרחב הטופולוגי. מרחב טופולוגי קבוצה פתוחה

בקרוב נראה שזו אכן, במובן מסוים, הכללה של מרחבים מטריים, אבל במבוא הזה ננסה להסביר למה המושג המופשט הזה אכן נחוץ.

מרחבי פונקציות

נזכיר שסדרת פונקציות f_n מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ *מתכנסת נקודתית* לפונקציה g אם הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת ל-$g(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. היינו רוצים לומר שהסדרה f_n עצמה, כסדרה של נקודות בקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ של כל הפונקציות מ-$\mathbb{R}$ לעצמו, מתכנסת ל-g, איבר נוסף באותה קבוצה. אולם אין שום מטריקה סבירה על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ עבורה זה נכון.

מנות

המעגל $S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1\}$ הוא תת-קבוצה של מרחב מטרי, ולכן מרחב מטרי בעצמו. התיאור הזה של הגאומטריה של המעגל משתמש בשיכון שלו במישור. האם הגאומטריה שלו אכן תלויה בשיכון הזה? אינטואיטיבית, המעגל מתקבל מקטע היחידה הסגור $I = [0,1]$ על-ידי הדבקת הקצוות $0, 1$ אחד לשני. האם ניתן לתאר את הפעולה הזו מתמטית? הקטע I הוא מרחב מטרי בעצמו, אבל פונקציית ההדבקה לא שומרת על המטריקה: המרחק בין 0 ל-1 הוא 1, אבל המרחק בין התמונות הוא 0.

באופן כללי, נסמן ב-d את המטריקה על I, וב-$p : I \to S^1$ את פונקציית ההדבקה (נניח, $p(t) = \langle \cos(2\pi t), \sin(2\pi t) \rangle$). על-מנת להגדיר מטריקה על S^1 שתשקף את המטריקה על I, אפשר לנסות להגדיר: $d_1(u,v) = \min\{d(x,y) \mid p(x) = u, p(y) = v\}$ לכל $u, v \in I$.

תרגיל 1.1.3. 1. הוכיחו שהנוסחה אכן מגדירה פונקציה $d_1 : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, אבל היא אינה מטריקה.

2. אפשר לנסות לתקן את הבעיה בהגדרה באמצעות התיקון הבא: $d_2(u,v) = \min\{d_1(u,w) + d_1(w,v) \mid w \in S^1\}$. הוכיחו ש-$d_2$ מטריקה על S^1.

3. באופן כללי, יתכן שצריך לעשות יותר מ"קפיצה" אחת, אז סביר לנסות להגדיר $d'(u,v) = \inf\{d_1(u,w_1) + \cdots + d_1(w_n,v) \mid w_i \in S^1\}$. נתבונן במקום בהדבקה הקודמת בפונקציה $p : \mathbb{R} \to S^1$ הנתונה על-ידי $p(t) = \langle \cos(2\pi e^t), \sin(2\pi e^t) \rangle$. הוכיחו שביחס לפונקציה זו (עם המטריקה הרגילה על $\mathbb{R}$), הפונקציה d' אינה מטריקה על S^1.

מטריקות שונות על אותו מרחב

לא הגדרנו מה זה אומר ששני מרחבים מטריים הם "אותו דבר", אבל סביר שזה אומר שהתכונות של המטריקה זהות בשניהם. למשל, המרחבים המטריים $(0,1)$ (קטע פתוח) ו-$\mathbb{R}$ עם המטריקות הרגילות הם שונים: המטריקה על $(0,1)$ חסומה, ועל $\mathbb{R}$ לא. מצד שני, קיימת העתקה רציפה הפיכה מ-$(0,1)$ ל-$\mathbb{R}$, עם הופכית רציפה (למשל $t \mapsto \cot(\pi t)$), ולכן מנקודת המבט של פונקציות רציפות, שני המרחבים לא ניתנים להפרדה. איזו נקודת מבט היא הנכונה? זה תלוי בהקשר.

1.2 הטורוס

המושג של מרחב טופולוגי מאפשר להגדיר מהן העתקות רציפות בין שני מרחבים כאלה. אחת הגישות להבנה של מרחב טופולוגי היא דרך הבנת אוסף כל ההעתקות הרציפות ממנו (למרחב כלשהו) או אליו. נדגים זאת ראשיות באמצעות המעגל. קיימת העתקה רציפה מ-I ל-S^1, העתקת ההדבקה f (רציפה במובן המוכר עבור מרחבים מטריים, בהמשך נראה שעבור מרחבים מטריים המושגים מתלכדים). אם $g : S^1 \to X$ העתקה רציפה (כאשר X מרחב כלשהו), אז $\tilde{g} = g \circ f : I \to X$ העתקה רציפה המקיימת $\tilde{g}(0) = \tilde{g}(1)$. בהמשך נראה שגם ההיפך נכון: אם $g : I \to X$ העתקה רציפה המקיימת $g(0) = g(1)$, אז יש העתקה רציפה (בהכרח יחידה) $\bar{g} : S^1 \to X$ כך ש-$g = \bar{g} \circ f$.

במלים אחרות, העתקות רציפות מ-S^1 למרחב כלשהו X זה "אותו דבר" כמו העתקות רציפות מ-I ל-X שמקבלות אותו ערך בקצוות. זה בדיוק הרעיון של "הדבקת הקצוות". אם לא ידענו מראש מהו S^1 היה אפשר לתאר את ההדבקה באופן הבא: זהו מרחב S ביחד עם העתקה רציפה $f : I \to S$, המקיימת $f(0) = f(1)$, ועם התכונה:

(†) לכל מרחב X, ההרכבה $g \mapsto g \circ f$ נותנת התאמה חח"ע ועל בין העתקות רציפות מ-S ל-X, להעתקות רציפות מ-I ל-X המסכימות על הקצוות.

תכונה זו מתארת לחלוטין את אוסף ההעתקות הרציפות מ-S למרחב כלשהו X, ולכן נותר לשאול: האם מרחב כזה S קיים? והאם הוא יחיד? על השאלה הראשונה אנחנו יודעים את התשובה בדוגמא הנוכחית כי ראינו ש-S^1 כזה (ובאופן כללי, התשובה על שאלות כאלה היא כן, כפי שנראה בהמשך. זה אחד היתרונות של מרחבים טופולוגיים). לגבי היחידות, ניתן לענות כבר עכשיו:

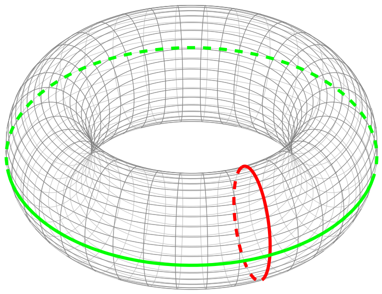
טענה 1.2.1. *אם $f : I \to S$ ו-$f' : I \to S'$ שניהם מקיימים את התכונה לעיל, אז יש העתקה רציפה יחידה $t : S \to S'$ כך ש-$t \circ f = f'$.*

הוכחה. לפי ההנחה, $f'(0) = f'(1)$. לכן, לפי התנאי (†), עבור $X = S'$, קיימת העתקה רציפה יחידה $t : S \to S'$ כך ש-$t \circ f = f'$. מאותה סיבה, קיימת העתקה רציפה יחידה $u : S' \to S$ המקיימת $u \circ f' = f$. לכן, $f = u \circ f' = u \circ (t \circ f) = (u \circ t) \circ f$. שימוש נוסף בתכונה (†), הפעם עבור $X = S$ וההעתקה $f : I \to S$, מראה שיש העתקה *יחידה* $v : S \to S$ המקיימת $v \circ f = f$. כיוון שהזהות היא העתקה כזו, קיבלנו ש-$u \circ t$ היא הזהות על S. באופן דומה, $t \circ u$ היא הזהות על S', כלומר u ההפכית של t. □

במלים אחרות, עד כדי העתקה רציפה הפיכה יחידה, המנה S מוגדרת על-ידי התכונה לעיל. הצלחנו לתאר את S^1 בלי להסתמך על המרחב $\mathbb{R}^2$ המכיל אותו.

תרגיל 1.2.2. הוכיחו שניתן לתאר את הפונקציות הרציפות על S^1 גם כפונקציות רציפות על $\mathbb{R}$ שהן מחזוריות עם מחזור 1 (כלומר, $f(x+1) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$).

באופן דומה, ניתן לתאר את הטורוס $\mathbb{T}^2$: אינטואיטיבית, זהו מרחב שהוא המעטפת של אבוב (או דונאטס). דרך אחת לתאר אותו הוא כהדבקה: הוא מתקבל מריבוע היחידה הסגור $I \times I$ על-ידי



איור 1: מערכת קואורדינטות על הטורוס

הדבקת צלעות הפוכות. מנקודת המבט הזו, ניתן לתאר כמו קודם את אוסף הפונקציות הרציפות ממנו למרחב X: אלה פונקציות רציפות $f : I \times I \to X$ המקיימות $f(0, x) = f(1, x)$ ו-$f(x, 0) = f(x, 1)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. אבל אם אנחנו כבר מבינים את המרחב S^1, אפשר לגשת אל הטורוס אחרת: אם נצייר שני מעגלים בכיוונים מאונכים על הטורוס, ניתן לתאר כל נקודה על הטורוס על-ידי שתי קואורדינטות, כל אחת על אחד המעגלים (ראו איור 1).

במלים אחרות, כקבוצה, ניתן לזהות את הטורוס עם המכפלה הקרטזית $S^1 \times S^1$, ואינטואיטיבית, הזיהוי הזה הוא רציף. האם ניתן לבטא את העובדה הזו במדויק?

נשאל שאלה יותר כללית: בהינתן מרחבים X ו-Y, האם יש מבנה טבעי של מרחב טופולוגי על המכפלה הקרטזית $X \times Y$? ננסה לתאר את הבעיה מנקודת המבט של פונקציות רציפות. קבוצתית, נקודה ב-$X \times Y$ מתאימה לזוג נקודות, אחת ב-x והשנייה ב-Y. מידע על נקודה בודדת לא יכול לקודד רציפות, אבל קבוצתית, אפשר לומר באופן שקול שפונקציה מ-Z ל-$X \times Y$ זה כמו לתת פונקציה מ-Z ל-X ופונקציה מ-Z ל-Y. את הרעיון הזה אפשר להעביר להקשר הטופולוגי: המרחב $X \times Y$ הוא מרחב המקיים:

1. פונקציות ההטלה $\pi_1 : X \times Y \to X$ ו-$\pi_2 : X \times Y \to Y$ הן רציפות. לכן, אם $h : Z \to X \times Y$ פונקציה רציפה, מתקבלות פונקציות רציפות $\pi_i \circ h$.

2. אם Z מרחב כלשהו, ו-$f : Z \to X$ ו-$g : Z \to Y$ שתי פונקציות רציפות, אז יש פונקציה יחידה $h : Z \to X \times Y$ כך ש-$\pi_1 \circ h = f$ ו-$\pi_2 \circ h = g$.

גם כאן, סביר לשאול האם מרחב כזה $X \times Y$ קיים, ועד כמה התנאים שהשתמשנו בהם מגדירים אותו ביחידות. על השאלה הראשונה נענה (כן) בהמשך, על השנייה אפשר לענות באופן דומה לטיעון עם המעגל, אבל אנחנו ניקח נקודת מבט יותר כללית.

1.3 קטגוריות

בסעיף הקודם אימצנו את נקודת המבט שכדי להבין מרחב טופולוגי X עלינו להבין את אוסף ההעתקות ממנו או אליו מכלל המרחבים. ראינו שנקודת המבט הזו מועילה למרות שלא הגדרנו

עדיין מהי העתקה רציפה. התכונה העיקרית של העתקות רציפות שהשתמשנו בה (ללא הוכחה) היא שהרכבה של העתקות רציפות היא העתקה רציפה.

נקודת המבט הזו מועילה לא רק בטופולוגיה אלא גם בתחומים רבים אחרים, והיא מפורמלת במסגרת *תורת הקטגוריות*, שמאפשרת הגדרות וטיעונים כמו שראינו במסגרת כללית. התורה שימושית מאוד בהקשר הטופולוגי (ובמידה רבה נולדה במסגרת זו), ואנחנו נשתמש במושגי היסוד שלה.

תורת הקטגוריות

קטגוריה
אובייקטים
מורפיזמים
הרכבה

הגדרה 1.3.1. *קטגוריה* $\mathcal{C}$ מורכבת מאוסף $\mathbf{Ob} = \mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}$ של *אובייקטים*, לכל $x, y \in \mathbf{Ob}$ קבוצה $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(x,y) = \mathcal{C}(x,y)$ של *מורפיזמים*, ולכל שלושה אובייקטים x, y, z פונקציה $\circ = \circ_{x,y,z}: \mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{C}(x,z)$ שנקראת *הרכבה*. המידע הזה מקיים את התנאים הבאים:

1. (אסוציאטיביות) לכל $f \in \mathcal{C}(x,y)$, $g \in \mathcal{C}(y,z)$ ו-$h \in \mathcal{C}(z,w)$ מתקיים $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

2. (יחידה) לכל אובייקט $x \in \mathbf{Ob}$ קיים מורפיזם $\mathbf{1}_x \in \mathcal{C}(x,x)$ המקיים $f \circ \mathbf{1}_x = f$ ו-$\mathbf{1}_x \circ g = g$ לכל $f \in \mathcal{C}(x,y)$ ולכל $g \in \mathcal{C}(y,x)$.

מורפיזם מ-x ל-y
תחום
המקור
טווח

אם x, y אובייקטים ו-$f \in \mathcal{C}(x,y)$ נאמר ש-f *מורפיזם מ-x ל-y*, ונסמן גם $f : x \to y$ או $x \xrightarrow{f} y$. האובייקט x נקרא *התחום* או *המקור* של f, ו-y נקרא *הטווח*.

קטגוריה קטנה

הערה 1.3.2. שימו לב למילה *אוסף* בהגדרת האובייקטים: אוסף זה לא נדרש להיות קבוצה (ובהרבה דוגמאות טבעיות אכן אינו קבוצה). בניגוד לזה, אוסף המורפיזמים בין שני אובייקטים הוא קבוצה. קטגוריה שאוסף האובייקטים בה הוא קבוצה נקראת *קטגוריה קטנה*.

נשים לב גם שכל מורפיזם בקטגוריה "יודע" מיהם התחום והטווח שלו. בפרט, קבוצות המורפיזמים עבור אובייקטים שונים הן זרות. נסמן ב-$\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}$ את האיחוד $\bigcup_{x,y \in \mathbf{Ob}_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}(x,y)$. אז יש לנו פונקציות $d, c : \mathbf{Mor} \to \mathbf{Ob}$ שמתאימות לכל מורפיזם את התחום והטווח שלו.

דוגמא 1.3.3. רוב המבנים המתמטיים שאנחנו מכירים מהווים קטגוריות: למשל, הקטגוריה $\mathcal{Set}$ בה האובייקטים הם קבוצות (מחלקה שאינה קבוצה!) והמורפיזמים הם פונקציות בין קבוצות, הקטגוריה $\mathcal{Vec}_{\Bbbk}$ של מרחבים וקטוריים מעל שדה (קבוע) $\Bbbk$, עם העתקות לינאריות ביניהם, הקטגוריה $\mathcal{Grp}$ של חבורות והעתקות של חבורות, וכו'. בכל המקרים, ההרכבות הן הרכבות רגילות של פונקציות. הקורס הזה יעסוק בעיקר בקטגוריה $\mathcal{Top}$ של מרחבים טופולוגיים, שלא הוגדרה עדיין.

דוגמא 1.3.4. נקבע שדה $\Bbbk$. הקטגוריה $\mathcal{Mat}_{\Bbbk}$ היא קטגוריה בה אוסף האובייקטים הוא $\mathbb{N}$, ולכל $i, j \in \mathbb{N}$, המורפיזמים מ-i ל-j הם מטריצות $j \times i$ עם ערכים ב-$\Bbbk$. ההרכבה נתונה על-ידי כפל מטריצות.

סוף
הרצאה 1,
16 במרץ