שאלות להגשה

1. נניח ש-X_i, עבור $i \in I$, קבוצה של מרחבים טופולוגיים, ו-$p_i : X \to X_i$ קבוצה של פונקציות מקבוצה X. הוכיחו:
   (א) יש טופולוגיה חלשה (גסה) ביותר עבורה כל הפונקציות p_i רציפות
   (ב) הטופולוגיה נוצרת (במובן של תרגיל 2.1.5 ברשימות) על-ידי האוסף
   $$\mathcal{B}_0 = \{p_i^{-1}(U_i) \mid i{\in}I, U_i{\in}\mathcal{T}_{X_i}\}.$$
   (ג) לכל מרחב Y, פונקציה $f : Y \to X$ היא רציפה עבור הטופולוגיה החלשה על X אם ורק אם $p_i \circ f$ רציפה לכל i (רמז: תרגיל 2.2.3 ברשימות)
   (ד) הסיקו שטופולוגיית המכפלה על מכפלה של מספר סופי של מרחבים היא טופולוגיית הקופסא
   (ה) במקרה ש-$I = \mathbf{1}$, המרחב $X_0 = \mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הרגילה, $X = \mathbb{R}$ ו-$p_0 : X \to X_0$ פונקציית הערך השלם, מהי הטופולוגיה החלשה שנקבעת על-ידי p_0?

2. נניח ש-I קבוצה, ונתבונן במרחב $X = \mathbb{R}^I$ של כל הפונקצית מ-I ל-$\mathbb{R}$ עם טופולוגיית *הקופסא* (עבור הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$). הוכיחו שסדרה f_n של איברים ב-X מתכנסת ל-0 אם ורק אם קיימת תת-קבוצה סופית $I_0 \subseteq I$ ומספר M כך ש-$f_n(i) = 0$ לכל $i \in I \setminus I_0$ ולכל $n > M$, ו-$f_n(i)$ מתכנסת ל-0 לכל $i \in I_0$.

3. נניח ש-I קבוצה.
   (א) נניח שלכל $i \in I$ נתונה העתקה רציפה בין מרחבים $f_i : X_i \to Y_i$. נגדיר $f : \prod_i X_i \to \prod_i Y_i$ על-ידי $f(x)(i) = f_i(x_i)$ (כלומר, f פועלת על כל קואורדינטה בנפרד דרך ה-f_i). הוכיחו ש-f רציפה גם בטופולוגית המכפלה וגם בטופולוגיית הקופסא (אותו סוג בתחום ובטווח).
   (ב) על קבוצת הפונקציות $\mathbb{R}^I$ מ-I ל-$\mathbb{R}$ מוגדרות פעולות כפל וחיבור, נקודתית. הוכיחו שפעולות אלה רציפות בטופולוגיית המכפלה ובטופולוגיית הקופסא.
   (ג) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^I$ העתקת האלכסון ($f(x)(i) = x$). הוכיחו ש-f רציפה בטופולוגיית המכפלה, אבל לא בטופולוגיית הקופסא.
   (ד) נניח ש-X_i משפחה של מרחבים (עבור $i \in I$), ונניח ש-J קבוצה נוספת, ו-$t : J \to I$ פונקציה. הוכיחו שהפונקציה $u \mapsto u \circ t$ מהמכפלה של X_i למכפלה של $X_{t(j)}$ היא רציפה.

4. הוכיחו שההגדרה של $y_X : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ (הפנקטור שמיוצג על-ידי X, הגדרה 3.1.9 ברשימות) אכן נותנת פנקטור, ושהפנקטור הזה שומר על מכפלות.

5. יהי $\Bbbk$ שדה, ונסמן ב-$\mathcal{C} = \mathbb{N} - \mathcal{V}ec$ את הקטגוריה הבאה: האובייקטים הם זוגות $\langle V, T \rangle$, כאשר V מרחב וקטורי מעל $\Bbbk$, ו-$T : V \to V$ העתקה לינארית. מורפיזם מ-$\langle V, T \rangle$ ל-$\langle W, S \rangle$ הוא העתקה לינארית $\phi : V \to W$ כך ש-$\phi \circ T = S \circ \phi$ (וההרכבה היא הרכבה רגילה של העתקות לינאריות). לכל אחד מהפנקטורים $f : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ הבאים, קבעו האם הוא (ניתן לזיהוי עם) פנקטור מיוצג. בכל המקרים, $f(V, T) \subseteq V$, והפנקטור נתון מורפיזמים על-ידי צמצום, $f(\phi) = \phi\restriction_{f(V,T)}$.
   (א) $f(V, T) = \ker(T)$
   (ב) $f(V, T) = \{v \in V \mid Tv = v\}$ (רמז: אפשר להוכיח טענה כללית שפותרת את שני הסעיפים ביחד)
   (ג) $f(V, T) = V$.
   (ד) $f(V, T)$ קבוצת הוקטורים העצמיים של T (וקטור האפס נחשב וקטור עצמי לצורך התרגיל)
   (ה*) $f(V, T) = T(V)$ (התמונה של T)