

## שאלות להגשה

1. נסמן ב- $I = [0, 1]$  את קטע היחידה הסגור, ב- $S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1\}$  את מעגל היחידה, וב- $p: I \rightarrow S^1$  את פונקציית ה"הדבקה"  $p(t) = \langle \cos(2\pi t), \sin(2\pi t) \rangle$ . נגדיר  $d_1: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  על-ידי

$$d_1(u, v) = \min\{|x - y| \mid p(x) = u, p(y) = v\}$$

(א) הוכיחו ש- $d_1$  מוגדרת היטב, אך אינה מטריקה על  $S^1$ .

(ב) אפשר לנסות לתקן את הבעיה בהגדרה באמצעות התיקון הבא:  
 $d_2(u, v) = \min\{d_1(u, w) + d_1(w, v) \mid w \in S^1\}$   
 הוכיחו ש- $d_2$  מטריקה על  $S^1$ .

(ג) באופן כללי, יתכן שצריך לעשות יותר מ"קפיצה" אחת, אז סביר לנסות להגדיר  $d'(u, v) = \inf\{d_1(u, w_1) + \dots + d_1(w_n, v) \mid w_i \in S^1\}$ . נתבונן במקום בהדבקה הקודמת בפונקציה  $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  הנתונה על-ידי  $p(t) = \langle \cos(2\pi e^t), \sin(2\pi e^t) \rangle$ . הוכיחו שביחס לפונקציה זו (עם המטריקה הרגילה על  $\mathbb{R}$ ), הפונקציה  $d'$  אינה מטריקה על  $S^1$ .

2. אובייקט  $x$  בקטגוריה  $C$  נקרא אובייקט אחרון (או אובייקט סופי) אם לכל אובייקט ב- $C$  יש מורפיזם יחיד ל- $x$ .

(א) מיצאו את האובייקטים האחרונים בקטגוריית הקבוצות, החבורות והשדות.

(ב) הוכיחו שכל שני אובייקטים אחרונים באותה קטגוריה הם איזומורפיים.

3. נניח ש- $R$  יחס על קבוצה  $S$ . נגדיר  $\mathbf{Ob} = S$  ו- $\mathbf{Mor} = R$  כאשר הפונקציות  $d, c$  הן ההטלות (כלומר יש מורפיזם יחיד מ- $x$  ל- $y$  אם ורק אם  $xRy$ ).

(א) הוכיחו שיש לכל היותר מבנה אחד של קטגוריה עם הנתונים הללו.

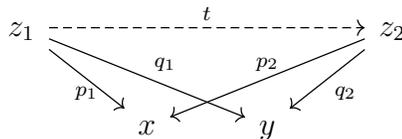
(ב) מהן התכונות ש- $R$  צריך לקיים על מנת שזו אכן תהיה קטגוריה? אילו תכונות נוספות נדרשות על מנת שהקטגוריה תהיה גרופואיד (כלומר, כל המורפיזמים הפיכים)?

(ג) כאשר זו אכן קטגוריה, תארו את האובייקטים האחרונים ואת המכפלות בה במונחים של  $R$ .

4. נניח ש- $x, y$  אובייקטים ב- $C$ , ונגדיר קטגוריה  $C_{/x,y}$  באופן הבא:

- האובייקטים הם שלשות  $\langle z, p, q \rangle$  כאשר  $z$  אובייקט ב- $C$  ו- $p: z \rightarrow x$  ו- $q: z \rightarrow y$  הם מורפיזמים ב- $C$ .

- מורפיזם מ- $\langle z_1, p_1, q_1 \rangle$  ל- $\langle z_2, p_2, q_2 \rangle$  הוא מורפיזם  $t: z_1 \rightarrow z_2$  המקיים  $p_2 \circ t = p_1$  ו- $q_2 \circ t = q_1$ .



- ההרכבה היא כמו ב- $C$ .

מיצאו את האובייקטים הסופיים ב- $C_{/x,y}$ .

5. נתבונן בקטגוריה שהאובייקטים שלה הן קבוצות, והמורפיזמים מ- $A$  ל- $B$  הם יחסים  $R \subseteq A \times B$ . הרכבה נתונה על-ידי הרכבת יחסים (כלומר  $S \circ R = \{ \langle a, c \rangle \mid \exists b \in B (aRb \wedge bSc) \}$ ) עבור  $R: A \rightarrow B$  ו- $S: B \rightarrow C$ . השבו בקטגוריה זו מיהם המורפיזמים הפיכים, האובייקטים האחרונים והמכפלות.