

לוגיקה מתמטית

משה קמנסקי

19 בנובמבר 2024

1 מבוא

לוגיקה מתמטית הוא התחום במתמטיקה שחוקר בצורה מדויקת מושגים כמו "טענה" ו-"הוכחה". על מנת לספק מוטיבציה, נתבונן בשתי דוגמאות היסטוריות.

1.1 גאומטריית המישור

אוקלידס רצה לדעת את כל הדברים שנכונים עבור נקודות, קווים ומעגלים במישור¹. על-מנת להבין זאת, אוקלידס ניסה לנסח רשימה קצרה של הנחות יסוד שנקראות "אינה מוטלת בספק", ולהוכיח מהן את כל יתר הטענות הנכונות. ארבעת הנחות היסוד הראשונות אכן פשוטות מאד: הראשונה, לדוגמא, אומרת שבין כל שתי נקודות קיים קו ישר אחד (את עבודתו של אוקלידס, "האלמנטים", ניתן לקרוא עד היום, גם באינטרנט: [3]). אוקלידס הצליח להוכיח את עשרים ושמונה הטענות הראשונות שלו בעזרת ארבע הנחות בסיס אלה². על מנת להוכיח טענות נוספות, הוא נזקק להנחת יסוד נוספת, שקולה לאקסיומת המקבילים: דרך נקודה הנמצאת מחוץ לישר נתון, עובר בדיוק ישר אחד מקביל לישר הנתון. הנחת יסוד זו פחות פשוטה ומובנת מאליה, ואוקלידס ניסה, אך לא הצליח, להוכיח אותה מארבע הנחות היסוד הראשונות.

השאלה איך להוכיח את אקסיומת המקבילים נותרה פתוחה מאות שנים, עד שהוכח שהאקסיומה בלתי תלויה: לא ניתן להוכיח (או להפריך) אותה מיתר הנחות היסוד. נשים לב, שטענה זו אינה טענה גאומטרית: היא אינה עוסקת בנקודות או קווים, אלא בטענות מתמטיות (מבחינה גאומטרית, אנחנו יודעים שאקסיומת המקבילים תקפה במישור). הטענה שייכת לתחום של לוגיקה מתמטית, בו הטענה שאקסיומת המקבילים בלתי תלויה באקסיומות האחרות, היא עצמה טענה מתמטית.

איך הוכחה הטענה? גאוס, לובאצ'בסקי ובויליאם (ובעקבותיהם מתמטיקאים אחרים) בנו מודל של ארבע האקסיומות הראשונות של אוקלידס, כלומר מבנה עם "קווים" ו-"נקודות", בו הקווים

¹ניתן לקרוא את הסיפור הזה יותר בהרחבה ב-[5]
²למעשה, כפי שנראה, הוא השתמש בהנחות נוספות

והנקודות מתנהגים כמו שמוכתב על ידי האקסיומות הראשונות, אולם בו אקסיומת המקבילים אינה מתקיימת. מודל זה בהכרח שונה מהמישור הרגיל, בו אקסיומת המקבילים תקפה, אבל הוא "שווה זכויות" לו: כל טענה שניתן להוכיח מארבע האקסיומות הראשונות, תקפה גם בו. למעשה, כל הוכחה מתוך אקסיומות אלה נותן טענה תקפה בכל המבנים המקיימים אותן. מה לגבי הכיוון ההפוך? נניח שיש לנו טענה בגאומטריה שנכונה בכל המודלים שסופקו על-ידי גאוס וחבריו, וגם בכל מודל אחר של ארבע האקסיומות הראשונות. האם ניתן אז להוכיח טענה זו מתוך אותן אקסיומות? לכאורה, אפשר לדמיין שהטענה נכונה "במקרה" בכל המבנים הללו, בלי שניתן להוכיח אותה. אנחנו נראה שזה לא כך: משפט א' (משפט השלמות, ??). כל טענה שנכונה בכל מבנה המקיים את האקסיומות של אוקלידס, ניתן להוכחה מאקסיומות אלה

בניסוח המשפט (שאינו מנוסח בצורה מדויקת בשלב זה) לא הקפדנו לציין על איזו קבוצת אקסיומות מדובר. למעשה, זה לא משנה: המשפט תקף לכל קבוצת אקסיומות, ולא רק לגאומטריה. כאמור, משפט השלמות אינו משפט בגאומטריה. מהם האובייקטים המתמטיים המופיעים במשפט הזה? על-מנת שנוכל אפילו לנסח את המשפט, עלינו לענות לפחות על השאלות הבאות:

שאלה 1.1.1. איך אפשר לראות טענות כאובייקטים מתמטיים?

שאלה 1.1.2. מהי הוכחה של טענה אחת מטענות אחרות?

שאלה 1.1.3. מהי משמעות האמירה שטענה מסוימת נכונה בגאומטריית המישור? באופן יותר כללי, מתי נאמר שטענה היא נכונה? מה הקשר בין זה לבין הוכחות של הטענה?

שאלה 1.1.4. איך ניתן להוכיח שטענה מסוימת לא תלויה באחרות?

בהינתן שהאקסיומה בלתי תלויה, התוספת שלה כהנחת יסוד מוצדקת. אבל האם יש טענות נוספות שאינן תלויות במערכת האקסיומות החדשה? האם אפשר לרשום רשימת אקסיומות המאפינות את המישור לחלוטין? תשובה אפשרית אחת לשאלה האחרונה נתונה במשפט הבא: משפט ב' (משפט לוונהיים-סקולם, ??). לכל קבוצה אינסופית A קיים מבנה המקיים את כל הטענות המתקיימות בגאומטריית המישור, שבו קבוצת הנקודות היא A . שוב, גם משפט זה נכון למבנים כלליים, ולא רק לגאומטריה.

1.2 אריתמטיקה

ראינו לעיל שלא ניתן לאפיין לגמרי את גאומטריית המישור על ידי רשימה של אקסיומות. עדיין, אפשר לשאול האם לפחות אפשר להוכיח את כל מה שנכון בגאומטריית המישור מתוך כל חמש האקסיומות של אוקלידס. מסתבר שלא, ולמעשה אפילו המשפט הראשון בספרו של אוקלידס דורש אקסיומות נוספות. אולם טארסקי, בתחילת המאה ה-20 (בעקבות עבודה של קליין, הילברט, ומתמטיקאים נוספים) הצליח להשלים את הרשימה: הוא נתן רשימה מפורשת של אקסיומות, והוכיח שמהן ניתן להוכיח את כל הטענות הגאומטריות הנכונות במישור. תחום נוסף שבו עסקו היוונים הוא תורת המספרים. גם שם הניסיון הוא לגלות את כל הטענות הנכונות עבור המספרים הטבעיים. בניגוד לגאומטריה, הם לא ניסו לעבוד בשיטה האקסיומטית.

שאלה 1.2.1. האם ניתן לראות גם טענות על מספרים כאובייקטים מתמטיים?
 מערכת אקסיומות עבור המספרים הטבעיים הוצעה על-ידי פיאנו. כמו בגאומטריה, גם כאן ניתן לשאול:
 שאלה 1.2.2. האם אקסיומות פיאנו מוכיחות את כל הטענות הנכונות על מספרים טבעיים? אם לא, האם קיימת מערכת אחרת שעושה זאת?
 אנחנו נראה:
 משפט ג' (משפט אי השלמות, ??). ישנן טענות בתורת המספרים שנכונות בטבעיים, אך אינן ניתנות להוכחה מאקסיומות פיאנו
 למעשה, המשפט אינו יחודי לאקסיומות פיאנו, ותקף לכל מערכת אקסיומות שניתנת לתיאור מפורש (במובן שנראה מאוחר יותר).

1.3 מבנים אחרים

שתי הדוגמאות האחרונות דנות בשני נושאים מרכזיים במתמטיקה: גאומטריה ותורת המספרים. אלה תחומים חשובים, אך אינם היחידים.
 שאלה 1.3.1. באילו מבנים ותורות מתמטיות ניתן לעסוק בשיטות הנ"ל? אילו כלים קיימים על מנת לענות על שאלות מהסוג לעיל לתורות אחרות?
 אנחנו נראה מספר שימושים מפתיעים של טענות בלוגיקה לתחומים אחרים במתמטיקה, ביניהם:
 משפט ד' (טענה 2.3.6). אם G גרף שכל תת-גרף (מלא) סופי שלו הוא k -צביע, אז G עצמו k -צביע
 משפט ה' (דוגמא ??). אם $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ העתקה פולינומית חד-חד-ערכית, אז היא על המשפט הבא הוא משפט קלאסי על פונקציות ממשיות, אולם אנחנו נראה הוכחה פשוטה שלו, בשפה קרובה (אך מדויקת לגמרי!) לניסוחים המקוריים של ניוטון ולייבניץ
 משפט ו' (משפט ערך הביניים, ??). אם $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ומקיימת $f(0) \leq 0 \leq f(1)$, אז קיים $c \in [0, 1]$ עבורו $f(c) = 0$.
 הרשימות מבוססות בין היתר על הספרים [2, 6, 7]. הספר [4] מומלץ אף הוא.

2 תחשיב הפסוקים

בסעיף זה נעסוק בסוג פשוט במיוחד של לוגיקה: תחשיב הפסוקים. לוגיקה זו לא מניחה דבר על המבנה של טענות בסיסיות, ובמקום זה עונה על שאלות הנוגעות לבניה של טענה מורכבת מתוך טענות יותר פשוטות על-ידי פעולות לוגיות. בהתאם לשאלות שהותוו במבוא, נראה את התשובות המדויקות שלוגיקה זו נותנת לשאלות:

1. מהי טענה?

2. מהי המשמעות של האמירה "טענה זו נכונה"?

3. מהי הוכחה?

לאחר שנגדיר את כל המושגים, נראה שניתן לענות על כל השאלות מהמבוא עבור לוגיקה זו, ונראה גם כמה שימושים.

2.1 אלגברות בוליאניות

כאמור, בשלב זה אנו מתייחסים אל כל טענה כאל קופסה שחורה. אם a ו- b טענות כלשהן, אינטואיטיבית ניתן ליצור מהן את הטענות החדשות " a וגם b ", " a או b " ו-"לא a ". אנחנו מעוניינים למצוא מבנה פורמלי בו האינטואיציה הזו באה לידי ביטוי. במילים אחרות, על קבוצת הטענות B בהן אנו מתעניינים מוגדרות פעולות $\wedge : B \times B \rightarrow B$ ("וגם"), $\vee : B \times B \rightarrow B$ ("או") ו- $\neg : B \rightarrow B$ ("שלילה"). הואיל ובשלב זה אנו מתעניינים בתוכן של הטענה, ולא בצורת כתיבתה, למשל, הטענות " a וגם b " ו-" b וגם a " הן מבחינתנו אותה טענה. באופן דומה, ניתן להצדיק את התנאים האחרים בהגדרה הבאה:

אלגברה בוליאנית הגדרה 2.1.1. אלגברה בוליאנית מורכבת מקבוצה B , איברים $0, 1 \in B$ ופעולות $\wedge : B \times B \rightarrow B$ ("וגם"), $\vee : B \times B \rightarrow B$ ו- $\neg : B \rightarrow B$, המקיימים את התנאים הבאים לכל $a, b, c \in B$:

$$1. \langle a \vee b \rangle = \langle b \vee a \rangle, \langle a \wedge b \rangle = \langle b \wedge a \rangle \text{ (חילופיות)}$$

$$2. a \vee ((b \vee c)) = ((a \vee b)) \vee c, \langle a \wedge ((b \wedge c)) \rangle = (((a \wedge b)) \wedge c) \text{ (קיבוציות)}$$

$$3. a \vee ((b \wedge c)) = ((a \vee b)) \wedge ((a \vee c)), a \wedge ((b \vee c)) = ((a \wedge b)) \vee ((a \wedge c)) \text{ (פילוג)}$$

$$4. \langle a \wedge 1 \rangle = a, \langle a \vee 0 \rangle = a$$

$$5. a \vee \neg a = 1, a \wedge \neg a = 0$$

נסמן ב- $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ את המבנה כולו

הערה 2.1.2. כתוצאה מחוקי הקיבוץ, אין צורך לרשום סוגריים כאשר מפעילים אותה פעולה ברצף, ואנחנו נרשום למשל $\langle a \wedge b \rangle \wedge c$ במקום $((a \wedge b)) \wedge c$. כמו-כן, נפעל לפי מוסכמה ש-"וגם" קודם, מבחינת סדר הפעולות, ל-"או", וכך נשמיט סוגריים נוספים (כלומר, נרשום $\langle a \wedge b \rangle \vee c$ במקום $((a \wedge b)) \vee c$). בנוסף נשתמש לרוב בחילופיות בלי להזכיר זאת.

דוגמא 2.1.3. אם B קבוצה בת איבר אחד, יש עליה מבנה יחיד של אלגברה בוליאנית (שימו לב שלא דרשנו ש- $0 \neq 1$! תרגיל: הוכיחו שאם ב- B יותר מאיבר אחד, אז $0 \neq 1$).

דוגמא 2.1.4. ישנה אלגברה בוליאנית יחידה בת שני איברים, $B = \{0, 1\}$. מבחינה אינטואיטיבית, זוהי האלגברה של ערכי האמת, כאשר 1 מסמל אמת, ו-0 שקר. נסמן אותה לרוב ב-2.

דוגמא 2.1.5. אם X קבוצה כלשהי, המבנה $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, \cdot^c, \emptyset, X \rangle$, כאשר $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ היא קבוצת החזקה, ו- $A^c = X \setminus A$, הוא אלגברה בוליאנית. אנחנו נקרא לאלגברות כאלה אלגברות חזקה.

אלגברות חזקה

ניתן לזהות את שתי הדוגמאות הקודמות כמקרים פרטיים של הדוגמא הזו, כאשר X קבוצה ריקה או קבוצה בת איבר אחד.

דרך אחת לחשוב על הדוגמא האחרונה היא לחשוב על איברי B כעל טענות על איברי X : נזוהה כל טענה עם איברי X המקיימים את הטענה. תחת הפירוש הזה, הפעולות של \mathcal{B} מזוהות עם האינטואיציה של "וגם", "או" ושלילה (כלומר, אם $C \subseteq X$ קבוצת האיברים ב- X המקיימים טענה c , ו- D קבוצת האיברים המקיימים טענה d , אז $C \cap D$ היא קבוצת האיברים המקיימים את הטענה "ע" וגם "d").

תת-קבוצה קוספית

דוגמא 2.1.6. אם X קבוצה כלשהי, תת-קבוצה קוספית של X היא תת-קבוצה שהמשלימה שלה (ביחס ל- X) סופית. הקבוצה B המורכבת מתתי הקבוצות של X שהן סופיות או קו-סופיות היא אלגברה בוליאנית (עם פעולות כמו קודם).

דוגמא 2.1.7. אם $X = [0, 1]$, קבוצת הממשיים בין 0 ל-1, אז קבוצת תתי-הקבוצות של X שהן איחוד סופי של קטעים היא אלגברה בוליאנית (שוב, עם פעולות החיתוך והאיחוד). אנחנו נראה עוד דוגמאות רבות מהסוג הזה בהמשך.

דוגמא 2.1.8. אם $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ אלגברה בוליאנית כלשהי, אז המבנה $\mathcal{B}^* = \langle B, \vee, \wedge, \neg, 1, 0 \rangle$ גם הוא אלגברה בוליאנית, שנקראת האלגברה הדואלית.

האלגברה הדואלית

התרגיל הבא כולל כמה עובדות שימושיות על אלגברות בוליאניות:

2.1.9. תרגיל לכל אלגברה בוליאנית \mathcal{B} , ולכל $a, b \in \mathcal{B}$ מתקיים:

$$1. \langle a \vee 1 \rangle = 1, \langle a \wedge 0 \rangle = 0$$

$$2. \langle a \wedge a \rangle = a$$

$$3. \langle a \wedge b \rangle = \langle a \vee b \rangle \text{ אם } a = b$$

$$4. \langle a \wedge b \rangle = 0 \text{ ו-} \langle a \vee b \rangle = 1 \text{ אם } b = \neg a$$

$$5. \neg(\neg a) = a$$

$$6. \neg(\langle a \vee b \rangle) = \neg a \wedge \neg b$$

$$7. a \wedge (\langle a \vee b \rangle) = a$$

הערה 2.1.10. בהנתן שוויון כלשהו בין שני ביטויים בוליאניים כמו בתרגיל, השוויון הדואלי הוא השוויון המתקבל מהמקורי על-ידי החלפת התפקידים של \vee -ו \wedge , והחלפת התפקידים של 1 ו-0. למשל, הדואלי של השוויון $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ הוא השוויון $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$. אם השוויון המקורי נכון עבור איברים כלשהם של אלגברה \mathcal{B} , אז השוויון הדואלי נכון עבור אותם איברים כאשר חושבים עליהם כאיברי האלגברה הדואלים \mathcal{B}^* . לכן, אם שוויון כלשהו נכון לכל האלגברות הבוליאניות, אז גם הדואלי שלו נכון עבורן. אנחנו נשתמש בזה באופן חופשי.

התרגיל הבא מציג דרך נוספת לחשוב על אלגברות בוליאניות, שלעתים מקלה על הוכחת תכונות כמו בתרגיל האחרון.

תרגיל 2.1.11. תהי \mathcal{B} אלגברה בוליאנית, ונגדיר לכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$ ש- $a \leq b$ אם $a \wedge b = a$.

1. הוכיחו שזהו סדר חלקי על \mathcal{B} , עם מקסימום 1 ומינימום 0.

2. הוכיחו שלכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$, החסם העליון ביניהם ביחס ל- \leq קיים ושווה ל- $\langle a \vee b \rangle$ והחסם התחתון שווה ל- $\langle a \wedge b \rangle$ (נזכיר שחסם עליון של קבוצה A בסדר חלקי הוא איבר m הגדול או שווה לכל איבר ב- A , וקטן מכל איבר אחר שמקיים זאת. חסם עליון כזה, אם קיים, הוא יחיד)

3. נניח ש- P קבוצה סדורה כמו בסעיפים הקודמים, ונסמן ב- $\langle a \vee b \rangle$ את החסם העליון וב- $\langle a \wedge b \rangle$ את החסם התחתון. נניח שלכל $a \in P$ קיים $b \in P$ כך ש- $\langle a \wedge b \rangle = 0$ ו- $\langle a \vee b \rangle = 1$, ושכל $a, b, c \in P$ מתקיים: $\langle a \vee b \rangle \wedge \langle a \vee c \rangle \leq a \vee \langle b \wedge c \rangle$. הוכיחו ש- $\langle P, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ אלגברה בוליאנית.

4. פתרו שוב את תרגיל 2.1.9 בעזרת התרגיל הנוכחי

בהמשך, כשנדבר על אלגברות בוליאניות, נתייחס באופן חופשי ליחס הסדר מהתרגיל האחרון. נחזור למוטיבציה: אם אנחנו חושבים על איברי אלגברה בוליאנית \mathcal{B} כטענות, איך לנסח את העובדה שבמצב נתון, כל טענה היא אמיתית או שיקרית? אנחנו רוצים להצמיד לכל טענה $b \in \mathcal{B}$ ערך אמת $v(b)$, שיכול להיות אמת או שקר. כלומר, אנחנו מדברים על פונקציות $v: \mathcal{B} \rightarrow \{0, 1\}$, אבל הפונקציות צריכות לקיים תנאים מסוימים: אם אמרנו שהטענות a ו- b שתייהן נכונות, אז כך גם $\langle a \wedge b \rangle$, ואילו $\neg a$ שיקרית. במונחים של ההגדרה הבאה, אנחנו מתעניינים בהומומורפיזמים מ- \mathcal{B} ל- $2 = \{0, 1\}$.

הגדרה 2.1.12. העתקה של אלגברות בוליאניות מאלגברה בוליאנית \mathcal{B}_1 לאלגברה בוליאנית \mathcal{B}_2 היא פונקציה $\omega: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ המקיימת:

$$1. \omega(\langle a \wedge b \rangle) = \omega(a) \wedge \omega(b)$$

$$2. \omega(\neg a) = \neg \omega(a)$$

לכל $a, b \in \mathcal{B}_1$. (העתקה כזו נקראת גם הומומורפיזם של אלגברות בוליאניות) העתקה כזו נקראת שיכון אם היא חד-חד-ערכית, ואיזומורפיזם אם היא הפיכה.

הומומורפיזם
שיכון
איזומורפיזם

הערה 2.1.13. בגלל תרגיל 2.1.9, העתקה כזו מקיימת גם $\omega(1) = \omega(\langle a \vee b \rangle) = \omega(a) \vee \omega(b)$ ו- $\omega(0) = 0$. כמו-כן, היא שומרת על הסדר החלקי מתרגיל 2.1.11. נשים לב שלמרות הסימון הזה, הפעולות בצד שמאל הן ב- \mathcal{B}_1 ואלה שבצד ימין הן ב- \mathcal{B}_2 .

2.1.14. דוגמא. לכל אלגברה יש העתקה יחידה אל האלגברה בת איבר אחד. אם ב- \mathcal{B} יש יותר מאיבר אחד, אין העתקה מהאלגברה בת איבר אחד ל- \mathcal{B} .

2.1.15. דוגמא. יש העתקה יחידה מ-2 לכל אלגברה בוליאנית. העתקה מאלגברה \mathcal{B} ל-2 נקראת השמה. אלה העתקות שנתעניין בהן מאד בהמשך, שכן, כאמור, הן ממדלות את התהליך של בחירת ערכי אמת לטענות.

2.1.16. דוגמא. אם $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ היא אלגברת קבוצת החזקה, כל איבר x של X מגדיר השמה $\omega_x: \mathcal{B} \rightarrow 2$, הנתונה על ידי: $\omega_x(A) = 1$ אם $x \in A$ ו-0 אחרת. אם חושבים על איברי \mathcal{B} כטענות על איברי X , אז ω_x היא ההשמה ש"בודקת" האם הטענה נכונה עבור x .

2.1.17. תרגיל. באופן יותר כללי, אם $C \subseteq X$, הוכיחו שהפונקציה $A \mapsto A \cap C$ היא הומומורפיזם מ- $\mathcal{P}(X)$ ל- $\mathcal{P}(C)$.

2.1.18. דוגמא. אם \mathcal{B} אלגברה בוליאנית בת יותר מאיבר אחד, אז פונקציית הזהות אינה הומומורפיזם מ- \mathcal{B} ל- \mathcal{B}^* (למה?) מאידך, פונקציית השלייה היא איזומורפיזם מ- \mathcal{B} ל- \mathcal{B}^* .

סוף
הרצאה 1,
4 בנוב
אטום

איבר $a \neq 0$ של אלגברה בוליאנית \mathcal{B} הוא אטום אם אין איבר $b \in \mathcal{B}$ המקיים $0 < b < a$. למשל, אם $\mathcal{B} = \mathcal{P}(A)$ אלגברת חזקה, האטומים הם בדיוק היחידונים.

2.1.19. תרגיל (אלגברות בוליאניות סופיות). נניח ש- \mathcal{B} אלגברה בוליאנית סופית

1. הוכיחו שלכל איבר $b \neq 0$ יש אטום $a \leq b$.

2. הוכיחו ש- \mathcal{B} איזומורפית לאלגברת חזקה

3. הוכיחו שאלגברה בוליאנית אינסופית אינה בהכרח איזומורפית לאלגברת חזקה

2.1.20 משפט סטון

מי שניסה לפתור את תרגיל 2.1.9, גילה אולי שזה יותר קשה ממה שזה נראה. מצד שני, כל הטענות שם קלות מאד להוכחה עבור המקרה בו $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ היא אלגברת החזקה של איזושהי קבוצה. בתרגיל האחרון ראינו שכל אלגברה בוליאנית סופית היא כזו, אבל זה לא נכון לאלגברות כלליות.

נניח עכשיו ש- \mathcal{B} אלגברה בוליאנית כלשהי, עבורה יש לנו שיכון $t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ עבור איזושהי קבוצה X . אז אפשר להוכיח את אחד השוויונים עבור \mathcal{B} באופן הבא: נניח שהשוויון אינו נכון עבור איזשהם איברים $a, b \in \mathcal{B}$. אחרי שנפעיל את t נקבל, בגלל ש- t שיכון, שהשוויון אינו נכון עבור האיברים $t(a)$ ו- $t(b)$ ב- $\mathcal{P}(X)$. אבל כבר הוכחנו שהשוויון נכון לכל זוג איברים בכל אלגברה מהצורה הזו.

במילים אחרות, כל משוואה שנכונה לכל האיברים באלגברה \mathcal{B} נכונה גם לכל האיברים באלגברה שמשוכנת בה (בהמשך תהיה לנו השפה לנסח את הטענה הזו באופן יותר מדויק ויותר כללי). הואיל ובדיקת שוויונים כאלה קלה מאד באלגברות חזקה, נשאלת השאלה: אילו אלגברות ניתנות לשיכון באלגברות חזקה?

משפט 2.1.21 (משפט הייצוג של סטון). לכל אלגברה בוליאנית \mathcal{B} קיימת קבוצה X ושיכון $t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}(X)$

על מנת להוכיח את המשפט, עלינו ראשית לזהות את X . נניח ראשית ש- $\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y)$ עבור איזשהו Y . האם אנחנו יכולים לשחזר את איברי Y מתוך מבנה האלגברה של \mathcal{B} ? ראינו בדוגמא 2.1.16 שלכל איבר $y \in Y$ ניתן להתאים השמה $\omega_y: \mathcal{B} \rightarrow 2$. לכן, קיבלנו העתקה $\mathcal{S}(\mathcal{B}) \rightarrow Y$, כאשר $\mathcal{S}(\mathcal{B})$ קבוצת ההשמות על \mathcal{B} , אשר נתונה על-ידי $y \mapsto \omega_y$. העתקה זו חד-חד-ערכית, משום שאם $y \neq z$, אז $1 = \omega_y(\{y\}) \neq \omega_z(\{y\}) = 0$ (כפי שנראה בהמשך, היא הרוב לא על, אבל זה פחות חשוב, כי אנחנו מחפשים רק שיכון). אז תיארונו קבוצה X המכילה את Y במונחים של מבנה האלגברה הבוליאנית בלבד. בפרט, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X)$. כעת נוותר על ההנחה ש- \mathcal{B} אלגברת חזקה, ונשתמש באותו רעיון כדי להגדיר את X באופן כללי.

הוכחת משפט סטון. נסמן ב- X את קבוצת ההשמות על \mathcal{B} , ונגדיר $t: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ על-ידי:

$$t(b) = \{\omega: \mathcal{B} \rightarrow 2 \mid \omega(b) = 1\} \subseteq X$$

אז לכל $b, c \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} t(b \wedge c) &= \{\omega: \mathcal{B} \rightarrow 2 \mid 1 = \omega(b \wedge c) = \omega(b) \wedge \omega(c)\} = \\ &= \{\omega: \mathcal{B} \rightarrow 2 \mid 1 = \omega(b)\} \cap \{\omega: \mathcal{B} \rightarrow 2 \mid 1 = \omega(c)\} = t(b) \cap t(c) \end{aligned}$$

ובאופן דומה לשלילה.

זה מראה ש- t העתקה של אלגברות בוליאניות. כדי להוכיח ש- t חד-חד-ערכית, עלינו להוכיח שלכל $a \neq b \in \mathcal{B}$ יש השמה $\omega: \mathcal{B} \rightarrow 2$ כך ש- $\omega(a) \neq \omega(b)$. זה התוכן של המשפט הבא, שמסיים את ההוכחה. \square

משפט 2.1.22. אם a ו- b שני איברים שונים באלגברה בוליאנית \mathcal{B} , אז יש השמה $\omega: \mathcal{B} \rightarrow 2$ כך ש- $\omega(a) \neq \omega(b)$.

נשים לב שבפרט, המשפט אומר שלכל אלגברה בוליאנית לא טריוויאלית \mathcal{B} יש השמה, עובדה לא ברורה בכלל. אנחנו נוכיח את המשפט באמצעות תרגומו לכמה טענות שקולות. הראשונה היא רדוקציה למקרה פרטי:

תרגיל 2.1.23. הוכיחו שהמשפט נובע מהמקרה הפרטי בו $b = 0$

לפי התרגיל האחרון, עלינו להוכיח שאם $b \neq 0$, אז יש השמה $\omega: \mathcal{B} \rightarrow 2$ כך ש- $\omega(b) = 1$. על מנת להוכיח זאת, נתבונן בהשמה כלשהי $\omega: \mathcal{B} \rightarrow 2$, ונשאל: איך נראית הקבוצה $\omega^{-1}(1)$? מסתבר שקבוצות כאלה מתוארות באופן הבא:

הגדרה 2.1.24. תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ של אלגברה בוליאנית נקראית על-מסנן אם:

$$1. \text{ לכל } a, b \in \mathcal{F} \text{ גם } \langle a \wedge b \rangle \in \mathcal{F}.$$

$$2. \text{ לכל } a \in \mathcal{B}, \text{ אחד מ-} a, -a \text{ שייך ל-} \mathcal{F}.$$

$$3. 0 \notin \mathcal{F}$$

תרגיל 2.1.25. הוכיחו שאם \mathcal{F} על-מסנן, אז

$$1. \mathcal{F} \text{ לא ריק}$$

$$2. \text{ אם } a \in \mathcal{F} \text{ ו-} b \geq a \text{ אז } b \in \mathcal{F}$$

תרגיל 2.1.26. הוכיחו ש- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ על-מסנן אם ורק אם יש השמה $\omega : \mathcal{B} \rightarrow 2$ כך ש- $\omega^{-1}(1) = \mathcal{F}$

לפי התרגיל האחרון, ניתן לתרגם את הבעיה שלנו לשאלה: האם לכל $b > 0$ יש על-מסנן שמכיל אותו? כדי לענות על השאלה, מסתבר שכדאי לשאול שאלה קצת יותר כללית: אילו קבוצות של איברים של \mathcal{B} מוכלות בעל-מסנן?

הגדרה 2.1.27. תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ נקראת מסנן אם:

$$1. \text{ לכל } a, b \in \mathcal{F} \text{ גם } \langle a \wedge b \rangle \in \mathcal{F}$$

$$2. \text{ לכל } a \in \mathcal{F} \text{ ו-} b \geq a \text{ גם } b \in \mathcal{F}$$

$$3. \mathcal{F} \text{ לא ריקה}$$

$$4. 0 \notin \mathcal{F}$$

היתרון במסננים (על פני על-מסננים) הוא שיש הרבה מסננים שמופיעים באופן טבעי ואפשר לתאר אותם במפורש, בעוד שזה לרוב בלתי אפשרי לתאר על-מסנן. נראה דוגמאות של מסננים בהמשך, אבל בינתיים נשים לב לעובדה הבאה:

תרגיל 2.1.28. נניח ש- \mathcal{F}_0 תת-קבוצה של אלגברה בוליאנית \mathcal{B} כך שלכל $b_1, \dots, b_k \in \mathcal{F}_0$, $b_1 \wedge \dots \wedge b_k \neq 0$ אז יש מסנן שמכיל את \mathcal{F}_0 . בפרט, אם $b \neq 0$ אז יש מסנן שכולל אותו.

אינטואיטיבית, אפשר לחשוב על מסנן כעל אוסף הטענות שאדם (רציונלי) יכול להאמין בהן. על-מסנן הוא אז אוסף הדעות של אדם שיש לו דעה על כל דבר. הקשר הפורמלי בין מסננים לעל-מסננים נתון בטענה הבאה.

טענה 2.1.29. התנאים הבאים על תת-קבוצה $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$ שקולים

$$1. \mathcal{F} \text{ על-מסנן}$$

2. \mathcal{F} מסנן מקסימלי (כלומר, לא מוכל ממש במסנן אחר)

הוכחה. נניח ש- \mathcal{F} על-מסנן, ו- $a \in \mathcal{F}$. אז לכל $b \geq a$, בדיוק אחד מ- b ו- $\neg b$ ב- \mathcal{F} . אם זה $\neg b$ אז גם $0 = a \wedge \neg b \in \mathcal{F}$. בסתירה להגדרה. זה מראה ש- \mathcal{F} מסנן. אם $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}$ מסנן שמרחיב אותו, ניקח $a \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}$. כיוון ש- $a \notin \mathcal{F}$ ההגדרה נותנת $\neg a \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$, ולכן $0 = a \wedge \neg a \in \mathcal{F}_1$, בסתירה להגדרה.

נניח עכשיו ש- \mathcal{F} מסנן מקסימלי. אם אינו על-מסנן, יש $a \in \mathcal{B}$ כך ש- $a, \neg a \notin \mathcal{F}$. אם לכל $b \in \mathcal{F}$, $\langle a \wedge b \rangle \neq 0$, אז לפי תרגיל 2.1.28, יש מסנן שמכיל את \mathcal{F} ואת a , בסתירה למקסימליות של \mathcal{F} . לכן יש $b \in \mathcal{F}$ כך ש- $\langle b \wedge a \rangle = 0$. באותו אופן, יש $c \in \mathcal{F}$ כך ש- $c \wedge \neg a = 0$. אבל אז $\langle b \wedge c \rangle = 0$, בסתירה לכך ש- \mathcal{F} מסנן. \square

תרגיל 2.1.30. הוכיחו שמסנן \mathcal{F} הוא על-מסנן אם ורק אם לכל $b, c \in \mathcal{B}$, אם $\langle b \vee c \rangle \in \mathcal{F}$ אז $b \in \mathcal{F}$ או $c \in \mathcal{F}$.

הטענה האחרונה, בתוספת התרגיל שלפניה, מראים שהוכחת המשפט תסתיים אם נראה שכל מסנן מוכל במסנן מקסימלי. הכלי הסטנדרטי לעשות זאת נקרא הלמה של צורן. כדי לצטט אותה, נזכיר את ההגדרה הבאה.

הגדרה 2.1.31. $(X, <)$ תהי קבוצה סדורה חלקית.

1. שרשרת ב- X הינה תת-קבוצה Y עליה הסדר מלא, כלומר לכל $x \neq y \in Y$, מתקיים שרשרת סדר מלא $x < y$ או $y < x$.
2. תת-קבוצה $Y \subseteq X$ ב- X היא חסומה מלעיל אם קיים $x \in X$ כך ש- $y < x$ או $y = x$ לכל $y \in Y$.
3. איבר מירבי ב- X הוא איבר $x \in X$ עבורו לכל $y \in X$ מתקיים $x \not< y$.

דוגמא 2.1.32. תהי S קבוצה, ו- X קבוצה של קבוצות המוכלות ב- S . אז X סדורה חלקית ביחס להכלת קבוצות: $x < y$ אם $x \subset y$. תת-קבוצה Y של X חסומה מלעיל אם יש קבוצה $y \in X$ המכילה את כל הקבוצות ב- Y . איבר מירבי הוא איבר שלא מוכל בשום קבוצה אחרת ב- X . לעיתים קרובות נעסוק בקבוצות X מסוג זה, עם התכונה שהאיחוד של כל שרשרת של קבוצות ב- X , גם הוא קבוצה ב- X . במקרה זה, האיחוד הוא חסם מלעיל של השרשרת, ולכן כל שרשרת חסומה מלעיל.

דוגמא 2.1.33. בתור מקרה פרטי של הדוגמא הקודמת, יהי S מרחב וקטורי (מעל שדה כלשהו), ותהי X קבוצת הקבוצות הבלתי תלויות לינאריות ב- S . איחוד של שרשרת של קבוצות בלתי תלויות הוא קבוצה בלתי תלויה (שכן כל תלות לינארית היא בין מספר סופי של וקטורים, אשר שייכים לאחד האיברים בשרשרת). איבר מירבי ב- X , כלומר קבוצה בלתי תלויה מירבית, נקרא בסיס של S .

עובדה 2.1.34 (הלמה של צורן). תהי X קבוצה סדורה חלקית, בה כל שרשרת חסומה מלעיל. אז קיים ב- X איבר מירבי.

תרגיל 2.1.35. הראו שמהלמה של צורן נובעת הגירסא היותר חזקה: עם אותן הנחות, לכל איבר קיים איבר מירבי הגדול ממנו

תרגיל 2.1.36. הקבוצה הריקה הינה קבוצה סדורה חלקית (באופן יחיד). למה היא אינה מהווה סתירה ללמה של צורן?

בגלל הלמה של צורן, משתלם לנסח תכונות של עצמים על-ידי תנאי מקסימליות. למשל:

דוגמא 2.1.37. לפי דוגמא 2.1.33, לכל מרחב וקטורי יש בסיס

מסיבות דומות, הלמה של צורן מופיעה במקומות רבים במתמטיקה. אנחנו נשתמש בה כדי להראות את קיומם של על-מסננים, ובכך להחזיר את כל החובות שצברנו:

טענה 2.1.38. כל מסנן באלגברה בוליאנית \mathcal{B} מוכל בעל-מסנן

הוכחה. נתבונן בקבוצת כל המסננים, עם יחס ההכלה. לפי תרגיל 2.1.35, מספיק להראות: איחוד של שרשרת מסננים היא מסנן. נניח ש- C שרשרת כזו, עם איחוד \mathcal{F} . אם $a, b \in \mathcal{F}$, קיימים $\mathcal{F}_a, \mathcal{F}_b \in C$, כך ש- $a \in \mathcal{F}_a$ ו- $b \in \mathcal{F}_b$. הואיל ו- C שרשרת, אחד משני המסננים, נניח \mathcal{F}_a , מוכל בשני. אז $a, b \in \mathcal{F}_a$, ולכן $a \wedge b \in \mathcal{F}_a \subseteq \mathcal{F}$ (כי \mathcal{F}_a מסנן). הוכחת התכונות האחרות דומה. \square

נסכם את ההוכחה:

הוכחת משפט 2.1.22. לפי תרגיל 2.1.23, עלינו להראות שלכל $b > 0$ ב- \mathcal{B} קיימת השמה $\omega : \mathcal{B} \rightarrow 2$ כך ש- $\omega(b) = 1$. לפי תרגיל 2.1.28, b שייך למסנן, ולפי הטענה האחרונה, מסנן זה מוכל בעל-מסנן \mathcal{F} . נגדיר $\omega : \mathcal{B} \rightarrow 2$ על-ידי $\omega(a) = 1$ אם ורק אם $a \in \mathcal{F}$. אז $\omega(b) = 1$, ולפי תרגיל 2.1.26, ω השמה. \square

סוף

הרצאה 2,

בנוב

מודל

מספקת

המסקנה הבאה היא כמעט טריוויאלית בהקשר הזה, אך בהקשר של הפירוש לפסוקים שיבוא בהמשך היא אחת התוצאות המרכזיות. נגיד שהשמה $\omega : \mathcal{B} \rightarrow 2$ היא מודל של תת-קבוצה $B_0 \subseteq \mathcal{B}$ (או שהיא מספקת את B_0) אם $\omega(b) = 1$ לכל $b \in B_0$.

מסקנה 2.1.39 (משפט הקומפקטיות לאלגברות בוליאניות). אם B_0 קבוצת איברים של אלגברה בוליאנית \mathcal{B} , כך שלכל תת-קבוצה סופית $F \subseteq B_0$ יש מודל ω_F , אז ל- B_0 יש מודל

תרגיל 2.1.40. הוכיחו את המסקנה

תרגיל 2.1.41. נניח ש- B_0 תת-אלגברה של \mathcal{B} . הוכיחו שכל השמה ל- B_0 ניתן להרחיב להשמה ל- \mathcal{B} .

תרגיל 2.1.42. תהי \mathcal{B} אלגברה בוליאנית, ולכל $a, b \in \mathcal{B}$ נסמן $a \rightarrow b = \neg(a) \vee b$.

1. הוכיחו שאם $\omega : \mathcal{B} \rightarrow 2$ השמה, אז $\omega(a \rightarrow b) = \omega(a) \rightarrow \omega(b)$.

2. נניח ש- \mathcal{B} קבוצה עם איבר נתון $0 \in \mathcal{B}$ ופעולה $(a, b) \mapsto a \rightarrow b$. נגיד ש- $\omega : \mathcal{B} \rightarrow 2$ השמה אם $\omega(0) = 0$ ומתקיים השוויון מהסעיף הקודם. נניח שמתקיים התנאי הבא: לכל $a, b \in \mathcal{B}$, אם לכל השמה ω מתקיים $\omega(a) = \omega(b)$, אז $a = b$. הוכיחו שיש מבנה יחיד של אלגברה בוליאנית על \mathcal{B} , עבורו \rightarrow מתקבל כמו בתחילת השאלה.

2.2 פסוקים ואלגברות חפשיות

הדיון שלנו על "טענות" היה, עד כה, קצת ערטילאי: הטענות הן איברים של אלגברה בוליאנית, הדוגמאות היו בעיקר אלגברות של קבוצות, וקשה לראות בקבוצות אלה טענות. יותר מזה, אלגברה בוליאנית מייצגת טענות עד-כדי שקילות: הטענות $\langle a \wedge b \rangle$ ו- $\langle b \wedge a \rangle$ שוות, על-פי הגדרה, בעוד שבעולם האמיתי אולי נרצה לחשוב על הטענה "קר ויורד גשם" כשונה מ-"יורד גשם וקר". בסעיף זה ניקח את הגישה השניה: נתחיל מקבוצה P של "טענות בסיסיות", ונבנה מהן, ברמה התחברית, טענות חדשות. על-מנת להפריד בין טענות ברמה הטכנית והטענות בדיון עצמו, נקרא לאיברי P והטענות שנבנות ממהם "פסוקים".

ברמה הטכנית, המשמעות של הבניה היא כזו: אנחנו בונים אלגברה בוליאנית שמכילה את P , אנחנו יכולים לקבוע את ערכי האמת של P כרצוננו, ומרגע שקבענו אותם, ערך האמת של יתר האיברים נקבע. במלים אחרות, האלגברה נתונה על-ידי ההגדרה הבאה:

הגדרה 2.2.1. לכל קבוצה P , האלגברה הבוליאנית החפשית על P היא אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}(P)$, המכילה את P ובעלת התכונה הבאה: אם \mathcal{B} אלגברה בוליאנית כלשהי, לכל העתקה של קבוצות $t: P \rightarrow \mathcal{B}$ יש הרחבה יחידה להעתקה של אלגברות בוליאניות $\mathcal{B}(P) \rightarrow \mathcal{B}$.

כלומר, t_0 מכתיבה את הערך של האיברים הבסיסיים ב- P , ומשם יש רק דרך אחת לחשב את הערך של כל איבר אחר. המטרה העיקרית שלנו בסעיף זה היא להוכיח:

משפט 2.2.2. לכל קבוצה P קיימת אלגברה בוליאנית חפשית יחידה $\mathcal{B}(P)$

היחידות במשפט דורשת קצת הסבר: ניתן כמובן לשנות את השמות של האיברים ב- $\mathcal{B}(P)$ (בהנחה שהיא קיימת), ולקבל אלגברה אחרת, אבל היא תהיה זהה מכל בחינה מעשית לאלגברה המקורית. באופן יותר מדויק:

תרגיל 2.2.3. נניח ש- $t_0: P \rightarrow Q$ פונקציה בין קבוצות, ו- $\mathcal{B}(P), \mathcal{B}(Q)$ אלגברות חפשיות על קבוצות אלה

1. הוכיחו שיש הומומורפיזם יחיד $t: \mathcal{B}(P) \rightarrow \mathcal{B}(Q)$ כך ש- $t(p) = t_0(p)$ לכל $p \in P$

2. הוכיחו ש- t_0 חד-חד-ערכית או על אם ורק אם t כזו (רמז: ביחרו פונקציה הפוכה בכיוון אחד). בפרט, אם $P \subseteq Q$, אז ניתן לזהות את $\mathcal{B}(P)$ עם תת-אלגברה של $\mathcal{B}(Q)$ (ואנחנו נעשה זאת)

3. הוכיחו שאם \mathcal{B}_1 ו- \mathcal{B}_2 שתי אלגברות חפשיות על אותה קבוצה P , אז קיים איזומורפיזם יחיד $t: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ שהצמצום שלו ל- P הוא הזהות

שימו לב שכל הטענות נובעות ישירות מההגדרה של אלגברה חפשית, ולא מהבנייה שלה.

הערה 2.2.4. המצב דומה מאד לרעיון של "מרחב לינארי שנוצר על-ידי קבוצה P ". נזכיר שבהנתן שדה k וקבוצה P , ניתן לבנות מרחב וקטורי $k\langle P \rangle$ מעל k שמכיל את P , וש- P בסיס שלו.

האלגברה הבוליאנית החפשית $\mathcal{B}(P)$

מהגדרת הבסיס נובע שכל העתקה של קבוצות $T_0 : P \rightarrow V$, כאשר V מרחב וקטורי כלשהו מעל k , ניתנת להרחבה יחידה להעתקה לינארית $T : k\langle P \rangle \rightarrow V$. כלומר, העתקה לינארית מ- $k\langle P \rangle$ נקבעת בצורה "חפשית" ויחידה על-ידי הצמצום שלה ל- P .

על-מנת להוכיח את חלק הקיום במשפט, אנחנו נבנה את קבוצת הפסוקים מעל P . לשם כך, נזכיר שמחרוזת (מעל קבוצה A) היא סדרה סופית של איברים מ- A (אנחנו מזהים את איברי A עם סדרות באורך 1).

הגדרה 2.2.5. עבור קבוצה P , קבוצת הפסוקים $\mathcal{F}(P)$ מעל P היא הקבוצה הקטנה ביותר F של מחרוזות מעל הקבוצה $P \cup \{ \langle, \rangle, \rightarrow, 0 \}$ המקיימת:

$$0 \in F \quad 1.$$

$$P \subseteq F \quad 2.$$

$$\langle x \rightarrow y \rangle \in F \text{ אם } x, y \in F \quad 3.$$

פסוק

כל איבר של $\mathcal{F}(P)$ נקרא פסוק מעל P .

כמובן שבהגדרה הזו אנו מניחים ש- P לא כוללת את הסימנים הנוספים $\langle, \rangle, \rightarrow, 0$. בשלב ראשון, 0 לא משחק תפקיד מיוחד, ואנחנו נסמך $P_0 = P \cup \{0\}$.

דוגמא 2.2.6. אם $P = \{p, q\}$, המחרוזות הבאות הן פסוקים מעל P : $\langle p \rightarrow q \rangle, \langle p \rightarrow 0 \rangle, 0, p$. וכן הלאה.

לקבוצת הפסוקים אין מבנה טבעי של אלגברה בוליאנית, אך מלבד זאת, היא מקיימת את הדרישה:

משפט 2.2.7. נניח ש- A קבוצה עם פעולה דו-מקומית $*$. לכל העתקה של קבוצות $t_0 : P_0 \rightarrow A$ יש הרחבה יחידה $t : \mathcal{F}(P) \rightarrow A$ המקיימת:

$$t(\langle x \rightarrow y \rangle) = t(x) * t(y) \quad (2.1)$$

$$\text{לכל } x, y \in \mathcal{F}(P).$$

ההוכחה תדגים את הדרך הרגילה להשתמש בהגדרה, שהיא סוג של אינדוקציה: מסתכלים על קבוצת הפסוקים שמקיימת את התכונה שאנחנו רוצים, ומראים שהיא מכילה את P_0 וסגורה תחת הגרירה. נקודה מעניינת היא שאנחנו מוכיחים קודם את היחידות, ואז משתמשים בה כדי להוכיח את הקיום.

הוכחה. נתחיל מהיחידות. נניח ש- $t_1, t_2 : \mathcal{F}(P) \rightarrow A$ שתייהן מקיימות את התנאים. נסמן $X = \{x \in \mathcal{F}(P) \mid t_1(x) = t_2(x)\}$ או $P_0 \subseteq X$, משום שהצמצום של t_i לקבוצה זו שווה ל- t_0 . כמו-כן, אם $x, y \in X$ אז

$$t_1(\langle x \rightarrow y \rangle) = t_1(x) * t_1(y) = t_2(x) * t_2(y) = t_2(\langle x \rightarrow y \rangle)$$

כלומר, $\langle x \rightarrow y \rangle \in X$ גם כן. לכן, $X \subseteq \mathcal{F}(P)$ מקיימת את התנאי בהגדרה של $\mathcal{F}(P)$, כלומר $X = \mathcal{F}(P)$ ו- $t_1 = t_2$. להוכחת הקיום, נזדקק לגרסא חזקה יותר של היחידות, שמופיעה בתרגיל 2.2.8. במונחים של תרגיל זה, נתבונן בקבוצה

$$E = \{t : X \rightarrow A \mid X \leq \mathcal{F}(P), t|_{X \cap P_0} = t_0|_{X \cap P_0}, \text{ חלקי, הומומורפיזם}\}$$

אנחנו טוענים שלכל $x \in \mathcal{F}(P)$ קיים $t \in E$ כך ש- t מוגדר על x . אכן, נסמן את קבוצת האיברים המקיימים תנאי זה ב- T . נשים לב ש- $t_0 \in E$, ולכן $P_0 \subseteq T$. נניח ש- $x_1, x_2 \in T$ אז יש $t_i : X_i \rightarrow A$, כאשר $t_i \in E$ ו- $x_i \in X_i$. לפי תרגיל 2.2.8, הצמצומים של t_i ל- $X_1 \cap X_2$ שווים, ולכן לפי תרגיל 2.2.9, יש פונקציה $t : X_1 \cup X_2 \rightarrow A$ שהצמצום שלה ל- X_i הוא t_i . נגדיר $t(\langle x_1 \rightarrow x_2 \rangle) = t(x_1) * t(x_2)$ (אם t אינה מוגדרת שם). אנו טוענים ש- t הומומורפיזם חלקי. המקרה היחיד שצריך לבדוק הוא האיבר החדש $\langle x_1 \rightarrow x_2 \rangle$. אבל לפי תרגיל 2.2.10, השוויון היחיד שצריך להראות הוא $t(\langle x_1 \rightarrow x_2 \rangle) = t(x_1) * t(x_2)$ וזה נכון לפי הגדרה. הראינו שהאוסף E מקיים את תנאי תרגיל 2.2.9, ולכן קיימת פונקציה יחידה t על התחום $\mathcal{F}(P)$ שהצמצום שלה לכל קבוצה סגורה הוא ב- E . בפרט, t עצמה ה- E , ולכן מקיימת את תנאי הטענה. \square

בהוכחה השתמשנו בשלוש הטענות הבאות, שהראשונה שבהן גם מסבירה את המינוח.

תרגיל 2.2.8. נאמר שתת-קבוצה $X \subseteq \mathcal{F}(P)$ היא סגורה, $X \leq \mathcal{F}(P)$, אם לכל $x, y \in \mathcal{F}(P)$ סגורה אם $\langle x \rightarrow y \rangle \in X$ אז גם $x, y \in X$. נאמר ש- $t : X \rightarrow A$ (כאשר A כמו במשפט 2.2.7) היא הומומורפיזם חלקי אם $t(\langle x \rightarrow y \rangle) = t(x) * t(y)$ לכל $x, y, \langle x \rightarrow y \rangle \in X$.

1. הוכיחו שחיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

2. הוכיחו שאם X סגורה, ו- $t_1, t_2 : X \rightarrow A$ הומומורפיזמים חלקיים כך ש- $t_1|_{X \cap P_0} = t_2|_{X \cap P_0}$ אז $t_1 = t_2$.

התרגיל הבא הוא תרגיל כללי על פונקציות בין קבוצות.

תרגיל 2.2.9. נניח ש- X, Y קבוצות, ו- E קבוצה של פונקציות חלקיות $t : X_t \rightarrow Y$ (כאשר $X_t \subseteq X$). נניח שלכל $t, s \in E$ מתקיים $t|_{X_s \cap X_t} = s|_{X_s \cap X_t}$. הוכיחו שקיימת פונקציה יחידה $u : U \rightarrow Y$ כאשר $U = \bigcup_{t \in E} X_t$, כך ש- $u|_{X_t} = t$ לכל $t \in E$.

התרגיל האחרון נקרא גם משפט הקריאה היחידה, משום שהוא אומר שיש דרך יחידה "לקרוא" איבר של $\mathcal{F}(P)$, כלומר, להבין איך הוא נבנה מהפסוקים הבסיסיים.

תרגיל 2.2.10 (משפט הקריאה היחידה). הוכיחו שהפונקציה $I : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(P)$ המוגדרת על-ידי $I(x, y) = \langle x \rightarrow y \rangle$ היא חד-חד-ערכית, ושהתמונה שלה זרה ל- P_0 . הוכיחו שהטענה לא הייתה נכונה אילו היינו מחליפים את $\langle x \rightarrow y \rangle$ ב- $x \rightarrow y$ בהגדרת $\mathcal{F}(P)$ (כלומר, מוותרים על הסוגריים)

נגדיר את הפעולות הבאות על $\mathcal{F}(P)$:

$$\neg : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(P) \quad \neg(x) = \langle x \rightarrow 0 \rangle \quad (2.2)$$

$$\wedge : \mathcal{F}(P) \times \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{F}(P) \quad \wedge(x, y) = \neg(\langle x \rightarrow \neg(y) \rangle) \quad (2.3)$$

הפעולות הללו לא הופכות את $\mathcal{F}(P)$ לאלגברה בוליאנית: למשל, $\neg(\neg(p)) \neq p$. הסיבה, כמו בדוגמא הזו, היא שיש פסוקים שהם שונים כמחרוזות, אך זהים מבחינת המשמעות הלוגית שלהם. במילים אחרות, ישנו יחס שקילות על קבוצת הפסוקים, בו שני פסוקים הם שקולים אם יש להם אותה משמעות לוגית. ישנן לפחות שתי דרכים לתאר את השקילות הזו, אנחנו נראה אחת מהן עכשיו, ואת השנייה מאוחר יותר.

לכל אלגברה בוליאנית \mathcal{B} , נסמן $x \rightarrow y = \neg(x) \vee y$ עבור כל $x, y \in \mathcal{B}$.

הגדרה 2.2.11. תהי P קבוצה.

1. השמה על $\mathcal{F}(P)$ היא פונקציה $\omega : \mathcal{F}(P) \rightarrow 2$ המקיימת: $\omega(0) = 0$ ו-
 $\omega(\langle x \rightarrow y \rangle) = \omega(x) \rightarrow \omega(y)$ השמה
2. שני איברים $x, y \in \mathcal{F}(P)$ הם שקולים לוגית אם לכל השמה $\omega : \mathcal{F}(P) \rightarrow 2$ מתקיים $\omega(x) = \omega(y)$. סימון: $x \equiv y$ שקולים לוגית
3. מודל של קבוצת פסוקים $\Gamma \subseteq \mathcal{F}(P)$ הוא השמה $\omega : \mathcal{F}(P) \rightarrow 2$ המקיימת $\omega(x) = 1$ לכל $x \in \Gamma$. נאמר גם ש- ω מספקת את Γ . מודל מספקת

טענה 2.2.12. תהי P קבוצה.

1. שקילות לוגית היא יחס שקילות על $\mathcal{F}(P)$.
2. אם $x \equiv x'$ ו- $y \equiv y'$ אז $\neg(x) \equiv \neg(x')$ ו- $\wedge(x, y) \equiv \wedge(x', y')$. לכן, \neg ו- \wedge משרות פעולות מוגדרות היטב על המנה $B := \mathcal{F}(P) / \equiv$ (שמסומנות באותו סימון).
3. המבנה $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \neg, 0 \rangle$ הוא אלגברה בוליאנית עם הפעולות המושרות (כאשר 0 מסמל את המחלקה של $0 \in \mathcal{F}(P)$, ויתר המבנה נקבע).
4. האיברים של P_0 אינם שקולים, ולכן P_0 משוכנת ב- \mathcal{B} .

תרגיל 2.2.13. הוכיחו את הטענה

הוכחת משפט 2.2.2. נוכיח שהאלגברה \mathcal{B} המופיעה בטענה 2.2.12 היא הפשוטה על P . נניח א-
 $t_0 : P \rightarrow \mathcal{B}'$ היא פונקציה כלשהי אל אלגברה בוליאנית \mathcal{B}' . עלינו להוכיח שהיא ניתנת להרחבה
 יחידה להעתקה $t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ של אלגברות בוליאניות. נסמן ב- \equiv $\mathcal{B} = \mathcal{F}(P)/\pi$ את
 העתקת המנה.

יחידות: נניח ש- $t_1, t_2 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ שתיהן מרחיבות את t_0 . נסמן $\tilde{t}_i = t_i \circ \pi : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{B}'$
 אז \tilde{t}_i מסכימות על P (כי הצמצום של שתיהן הוא t_0) ועל 0, ושתייהן מקיימות $\tilde{t}_i(\langle x \rightarrow y \rangle) = \tilde{t}_i(x) \rightarrow \tilde{t}_i(y)$
 לפי משפט 2.2.7, $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_2$. בגלל ש- π על, נובע מזה ש-
 $t_1 = t_2$.

קיום: לפי משפט 2.2.7, יש העתקה $\tilde{t} : \mathcal{F}(P) \rightarrow \mathcal{B}'$ שמרחיבה את t_0 , כך ש- $\tilde{t}(0) = 0$
 ו- $\tilde{t}(\langle x \rightarrow y \rangle) = \tilde{t}(x) \rightarrow \tilde{t}(y)$. אנחנו טוענים שאם $x \equiv x'$ אז $\tilde{t}(x) = \tilde{t}(x')$. אחרת, לפי
 משפט 2.1.22 יש השמה $\omega : \mathcal{B}' \rightarrow 2$ כך ש- $\omega(t(x)) \neq \omega(t(x'))$. אז $\omega \circ t$ השמה על $\mathcal{F}(P)$
 שנותנת ערכים שונים ל- x ול- x' , בסתירה לכך ש- $x \equiv x'$.

לפי הטענה האחרונה, \tilde{t} משרה פונקציה מוגדרת היטב על \mathcal{B} . התכונה של \tilde{t} מבטיחה ש- t
 מרחיבה את t_0 , ש- $t(0) = 0$ וש- $t(x \rightarrow y) = t(x) \rightarrow t(y)$ לכל $x, y \in \mathcal{B}$. פעולות האלגברה
 הבוליאנית ניתנות לאפיון באמצעות $(0-1)$, ולכן t העתקה של אלגברות בוליאניות. \square

אפשר לסכם את הנקודה שאנחנו עומדים בה: בהנתן קבוצה P של "טענות בסיסיות", בנינו את
 הקבוצה $\mathcal{F}(P)$ של הטענות שניתן להרכיב מהן, ואת הקבוצה $\mathcal{B}(P)$ של "טענות עד כדי שקילות
 לוגית". לקבוצה $\mathcal{B}(P)$ יש מבנה של אלגברה בוליאנית (ולכן אנחנו יודעים עליה משהו). לקבוצה
 $\mathcal{F}(P)$ אין מבנה אלגברי פשוט, אבל יש לה את היתרון שאפשר לרשום את האיברים שלה בצורה
 מפורשת, ולהוכיח עליהם טענות באינדוקציה (על בניית הפסוק). במילים אחרות $\mathcal{F}(P)$ מייצגת
 את הצד התחבירי (סינטקטי) של הטענות, ו- $\mathcal{B}(P)$ את הצד הסמנטי.

סוף

הרצאה 3,
 11 בנוב

תרגיל 2.2.14. הוכיחו ש- $\mathcal{B}(P)$ איזומורפית לאלגברת חזקה אם ורק אם P סופית

תרגיל 2.2.15. נניח ש- P קבוצה, ו- $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}(P)$ קבוצה של תתי-קבוצות של P . נזכיר שלכל
 $P_0 \subseteq P$, אנחנו חושבים על $\mathcal{B}(P_0)$ כתת-אלגברה של $\mathcal{B}(P)$ (תרגיל 2.2.3).

$$1. \text{ הוכיחו שאם } P_1, P_2 \in \mathcal{C}, \text{ אז } \mathcal{B}(P_1) \cap \mathcal{B}(P_2) = \mathcal{B}(P_1 \cap P_2).$$

2. הוכיחו שאם $\bigcup \mathcal{C} = P$ ולכל $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$ יש $P_3 \in \mathcal{C}$ כך ש- $P_1, P_2 \subseteq P_3$, אז
 $\mathcal{B}(P) = \bigcup \{ \mathcal{B}(P_0) \mid P_0 \in \mathcal{C} \}$. בפרט, לכל P , $\mathcal{B}(P) = \bigcup_{P_0 \subseteq P, |P_0| < \infty} \mathcal{B}(P_0)$.

2.3 שימושים של משפט הקומפקטיות

נזכיר שבמסקנה 2.1.39 הוכחנו את משפט הקומפקטיות לאלגברות בוליאניות. בשביל השימושים
 יהיה נוח לנסח את התוצאה במונחים של קבוצת הפסוקים $\mathcal{F}(P)$.

מסקנה 2.3.1 (משפט הקומפקטיות לתחשיב הפסוקים). אם $F \subseteq \mathcal{F}(P)$ קבוצה של פסוקים, כך
 שלכל תת-קבוצה סופית $F_0 \subseteq F$ יש מודל, אז ל- F יש מודל

2.3.2 תרגיל 2.3.1 את מסקנה 2.3.1 מתוך מסקנה 2.1.39

נראה עכשיו כמה שימושים של המסקנה האחרונה לבעיות מתחומים שונים. האסטרטגיה בכל השימושים דומה: אנחנו מתעניינים במחלקה מסוימת של אובייקטים. אנחנו מניחים את קיומם במקרה הסופי, ורוצים להראות שהם קיימים במקרה הכללי. מייצרים קבוצת פסוקים שמודל שלה מתאר (ומתואר על-ידי) אובייקטים מהסוג המעניין. אז בעיית הקיום של האובייקט הופכת לבעיית קיום מודל עבור אותה קבוצה. לפי משפט הקומפקטיות, הוכחת הקיום הזו נתונה על-ידי קיום במקרה הסופי, שאנחנו מניחים (או מוכיחים בנפרד).

2.3.3 טענה 2.3.3 כל סדר חלקי \prec על קבוצה X ניתן להרחבה לסדר מלא

הוכחה. נוכיח ראשית למקרה ש- X סופית, באינדוקציה על גודלה. הטענה ברורה אם X ריקה. אחרת, יהי x איבר מירבי ב- X . אז באינדוקציה \prec ניתן להרחבה לסדר מלא על $Y = X \setminus \{x\}$, וקל לראות שאם מרחיבים סדר זה ל- x על ידי הכלל $y \prec x$ לכל $y \in Y$, מתקבל סדר מלא על X המרחיב את הסדר המקורי.

תהי עתה X קבוצה סדורה חלקית כלשהי, ונתבונן בקבוצת הפסוקים הבסיסיים

$$P_X = \{p_{a,b} \mid a, b \in X\}$$

ובקבוצת הפסוקים Γ_X מעליה המורכבת מכל הפסוקים הבאים:

1. הפסוקים $p_{a,b}$ לכל $a \prec b$
2. $\neg p_{a,a}$ לכל $a \in X$
3. $\langle p_{a,b} \wedge p_{b,c} \rangle \rightarrow p_{a,c}$ לכל $a, b, c \in X$
4. $\langle p_{a,b} \vee p_{b,a} \rangle$ לכל $a \neq b \in X$

נשים לב שהמידע של השמה ω המספקת את Γ_X שקול למידע של סדר מלא על X המרחיב את \prec , על ידי: אם $a \prec b$ אם ורק אם $\omega(p_{a,b}) = 1$. לכן, עלינו להוכיח ש- Γ_X ספיקה, ולפי משפט הקומפקטיות, מספיק להוכיח שהיא ספיקה סופית.

תהי $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_X$ קבוצה סופית. אז היא מערבת מספר סופי של פסוקים בסיסיים, ולכן גם תת-קבוצה סופית X_0 של איברי X . כלומר, $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_{X_0}$ ומספיק שנוכיח שיש השמה המספקת את Γ_{X_0} . אך לפי האמור לעיל, השמה כזו נתונה על-ידי סדר מלא על X_0 המרחיב את \prec על X_0 .
□

2.3.4 צביעת גרפים

הדוגמא הבאה קשורה לתורת הגרפים. גרף הוא יחס דו-מקומי, סימטרי ואי-רפלקסיבי E על קבוצה V (כלומר, $E(a, b)$ גורר $E(b, a)$ לכל $a, b \in V$, ולכל $a \in V$ לא מתקיים $E(a, a)$). הקבוצה V נקראת קבוצת הקודקודים, ו- E קבוצת הקשתות. אם S קבוצה, הגרף (V, E) הוא S -

קבוצת הקודקודים
קבוצת הקשתות

צביע אם קיימת העתקה $c: V \rightarrow S$ (צביעה של קודקודי הגרף) כך שאם $E(a, b)$ אז $c(a) \neq c(b)$. אם k מספר טבעי, אנו מזהים אותו עם הקבוצה $\{1 \dots k-1\}$, ולכן המושג k -צביע מוגדר היטב. למשל, משפט ארבעת הצבעים $([8, 1])$ קובע שכל גרף מישורי סופי הוא 4-צביע (גרף מישורי הוא גרף שקודקודיו נקודות במישור, וקיימות העתקות רציפות $\gamma_{a,b}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ לכל $(a, b) \in E$, כך ש- $\gamma_{a,b}(0) = a, \gamma_{a,b}(1) = b$ ואם $\{a, b\} \neq \{c, d\}$ אז $\gamma_{a,b}((0, 1)) \cap \gamma_{c,d}((0, 1)) = \emptyset$ (זרות). תת-גרף מלא (ממש) של הגרף (V, E) הוא הגרף $(V_0, E \cap (V_0 \times V_0))$, כאשר V_0 תת-קבוצה (ממש) של V .

2.3.5 תרגיל. לכל k טבעי, מצאו דוגמה לגרף שאינו k -צביע, אבל כל תת-גרף מלא ממש שלו הוא k -צביע.

2.3.6 טענה. יהי $G = (V, E)$ גרף, k מספר טבעי. אז G הוא k -צביע אם ורק אם כל תת-גרף מלא סופי שלו הוא k -צביע.

הוכחה. כיוון אחד ברור. בכיוון השני, נתבונן בקבוצת הפסוקים Γ_G

$$1. \quad a \in V \text{ לכל } p_{1,a} \vee \dots \vee p_{k,a}$$

$$2. \quad \neg \langle p_{i,a} \wedge p_{j,a} \rangle \text{ עבור } a \in V \text{ ו-} 1 \leq i, j \leq k-1$$

$$3. \quad \neg \langle p_{i,a} \wedge p_{i,b} \rangle \text{ לכל } (a, b) \in E \text{ ו-} 1 \leq i \leq k-1$$

אז השמה ω המספקת Γ_G שקולה לצביעה חוקית של G ב- k צבעים (על ידי $i-1$ אם $c(a) = i$ אם $\omega(p_{i,a}) = 1$). לכן מספיק להראות ש- Γ_G ספיקה. ההמשך כמו בדוגמה הקודמת. □

2.3.7 תרגיל. הראו שאם מחליפים את k בקבוצה אינסופית בטענה האחרונה, הטענה אינה נכונה.

2.3.8 משפט החתונה

נניח שנתונות קבוצות F ו- M של נשים וגברים, בהתאמה, ולכל אישה קבוצה סופית של גברים שהיא מעוניינת בהם. האם ניתן לשדך לכל אישה גבר שהיא מעוניינת בו (כך שלכל גבר מותאמת רק אישה אחת)? במלים אחרות, בהנתן יחס $R \subseteq F \times M$ כך שלכל $f \in F$ הקבוצה $R[\{f\}] \subseteq M$ סופית, האם קיימת פונקציה (שידוך) חח"ע $p: F \rightarrow M$ כך ש- $p \subseteq R$? (נזכיר שלכל $X \subseteq F$, התמונה של R על X היא הקבוצה $\{m \in M \mid \exists f \in X \langle f, m \rangle \in R\}$). תנאי הכרחי הוא שלכל קבוצה סופית $F_0 \subseteq F$ של נשים מתקיים

$$(2.4) \quad |F_0| \leq |R[F_0]|$$

משפט החתונה (משפט Hall) אומר שזה גם תנאי מספיק.

2.3.9 תרגיל. הוכיחו שאם התנאי (2.4) מתקיים לכל $F_0 \subseteq F$ סופית, אז קיים פתרון לבעיה הנתונה על ידי R . (הוכיחו ראשית את המקרה הסופי, ואז השתמשו במשפט הקומפקטיות למקרה הכללי.)

2.3.10 הלמה של קניג

מסלול בגרף $G = (V, E)$ מקדקוד a לקדקוד b הוא סדרה סופית של קדקודים x_1, \dots, x_n שונים בזוגות, כך ש- $a = x_1, b = x_n$, ולכל $i < n, (x_i, x_{i+1}) \in E$. האורך של מסלול כזה הוא $n - 1$. המרחק בין שני קדקודים הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם (אם קיים). השכנים של קדקוד a הם הקודקודים במרחק 1 ממנו. הגרף G נקרא עץ אם בין כל שני קודקודים קיים מסלול יחיד.

טענה 2.3.11 (הלמה של קניג). אם G הוא עץ אינסופי בו לכל קודקוד מספר סופי של שכנים, אז קיים ב- G מסלול אינסופי (כלומר סדרה x_i של קדקודים שונים בזוגות, לכל i טבעי, כך ש- $E(x_i, x_{i+1})$ לכל i).

הוכחה. שוב, הרעיון הוא לבנות קבוצת פסוקים, שמודל שלהם נותן פתרון, כלומר מסלול אינסופי. נקבע קודקוד a_0 , ונסמן ב- S_k את קבוצת האיברים במרחק k מ- a_0 . באינדוקציה, כל S_k סופית. נתבונן בקבוצת הפסוקים הבאה:

$$1. \bigvee_{a \in S_k} p_a \text{ לכל } k$$

$$2. \neg \langle p_a \wedge p_b \rangle \text{ לכל } a \neq b \in S_k$$

$$3. p_a \rightarrow p_b \text{ אם } b \text{ נמצא על המסלול היחיד מ-} a_0 \text{ ל-} a$$

אז מודל של קבוצה זו מכיל אותו מידע כמו מסלול אינסופי המתחיל ב- a_0 . \square

תרגיל 2.3.12. השלימו את ההוכחה

תרגיל 2.3.13. נניח ש- $P = \{p_1, \dots\}$ בת-מניה. השתמשו בלמה של קניג כדי להוכיח את משפט הקומפקטיות במקרה זה (רמז: הגדירו גרף בו הקודקודים הם השמות חלקיות)

סוף

הרצאה 4,

14 בנוב'

מקורות

- [1] Kenneth Appel and Wolfgang Haken. "The solution of the four-color-map problem." In: *Sci. Amer.* 237.4, (1977) pp. -108,121. 152 ISSN: .0036-8733
- [2] Herbert B. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. 2nd ed. Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, ,2001 pp. xii+317. ISBN: -0-12.238452-0
- [3] Euclid. *The Elements*. Online version with Java illustrations by David E. Joyce. URL: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>.

- [4] Martin Hils and François Loeser. *A first journey through logic*. Student Mathematical Library .89 American Mathematical Society, Providence, RI, ,2019 pp. xi+185. ISBN: .978-1-4704-5272-8 DOI: 10 . 1090/stml/089.
- [5] Douglas R. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. New York, NY, USA: Basic Books, Inc., .1979 ISBN: .0465026850
- [6] Elliott Mendelson. *Introduction to mathematical logic*. 4th ed. Chapman & Hall, London, ,1997 pp. x+440. ISBN: .0-412-80830-7
- [7] Wolfgang Rautenberg. *A concise introduction to mathematical logic*. 2nd ed. Universitext. With a foreword by Lev Beklemishev. Springer, New York, ,2006 pp. xviii+256. ISBN: .978-0387-30294-2
- [8] *The Four color theorem*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem.