שאלות להגשה

1. הוכיחו שהטענות הבאות תקפות בכל אלגברה בוליאנית, לכל שני איברים a, b. יש להסתמך רק על ההגדרה, ולא על משפטים שהוכחנו.
   (א) אם $a \wedge b = a \vee b$ אז $a = b$
   (ב) $a \wedge (a \vee b) = a$
   (ג) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

2. תהי $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ונגדיר לכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$ ש-$a \leq b$ אם $a \wedge b = a$.
   (א) הוכיחו שזהו סדר חלקי על $\mathcal{B}$, עם מקסימום 1 ומינימום 0.
   (ב) הוכיחו שלכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$, החסם העליון ביניהם ביחס ל-$\leq$ קיים ושווה ל-$a \vee b$ והחסם התחתון קיים ושווה ל-$a \wedge b$.
   (ג) נניח ש-P קבוצה סדורה חלקית עם מקסימום 1 ומינימום 0, המקיימת:
      1. לכל שני איברים $a, b \in P$ יש חסם עליון, שנסמן $a \vee b$, וחסם תחתון שנסמן $a \wedge b$.
      2. לכל $a \in P$ קיים $b \in P$ כך ש-$a \wedge b = 0$ ו-$a \vee b = 1$.
      3. לכל $a, b, c \in P$ מתקיים:
      $$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \vee (b \wedge c)$$
      הוכיחו ש-$\langle P, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ אלגברה בוליאנית עבור פעולה יחידה $\neg$.

פתרון: נוכיח ראשית שלכל $a \in P$, האיבר b כמובטח בסעיף השני הוא יחיד. אכן, אם b' איבר נוסף עם אותן תכונות, אז לפי הסעיף השלישי,

$$b = b \vee 0 = b \vee (a \wedge b') \geq (b \vee a) \wedge (b \vee b') = 1 \wedge (b \vee b') = b \vee b'$$

ולכן $b \geq b'$. באותו אופן, נכון אי השוויון ההפוך, ולכן $b = b'$.

נגדיר $\neg(a) = b$ כאשר b האיבר היחיד כמו בסעיף השני. לפי ההגדרה, מתקיים $\neg(\neg(a)) = a$ לכל $a \in P$. מאידך, נניח ש-$a_1 \leq a_2$, ונסמן $b_i = \neg(a_i)$. אז לפי הסעיף השלישי,

$$b_1 = b_1 \vee 0 = b_1 \vee (a_1 \wedge b_2) \geq (b_1 \vee a_1) \wedge (b_1 \vee b_2) = b_1 \vee b_2$$

אז $b_1 \geq b_2$. לכן, $\neg$ היא איזומורפיזם של $\langle P, \leq \rangle$ עם $\langle P, \geq \rangle$ (כלומר, העתקה הפיכה הופכת סדר). בפרט, חוקי דה-מורגן מתקיימים: היא מחליפה חסמים עליונים ותחתונים.

באמצעות העובדה הזו, מספיק לבדוק אחת מכל זוג אקסיומות דואליות. בפרט, על-מנת להוכיח את חוק הפילוג, מספיק להראות שלכל a, b, c מתקיים

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \geq a \vee (b \wedge c)$$

זה נובע בקלות מההגדרות של חסם עליון ותחתון ונותן (בצירוף ההנחה) את אחד מחוקי הפילוג, והדואליות נותנת את החוק השני. יתר האקסיומות נובעות בקלות מהגדרת הפעולות ומהדואליות.

ההוכחה שהשלילה היא יחידה נובעת אף היא מהאפיון שלה שמוכיח את היותה פונקציה.

(ד) הוכיחו ש-$a \leq b$ אם ורק אם לכל השמה $v : \mathcal{B} \to 2$ מתקיים $v(a) \leq v(b)$

פתרון: כיוון שכל השמה שומרת סדר, כיוון אחד ברור. נניח שלא מתקיים $a \leq b$. זה שקול לכך שהאיבר $c = a \wedge \neg b$ שונה מ-0. ראינו שבמצב הזה קיימת השמה v המקיימת $1 = v(c) = v(a) \wedge \neg v(b)$. לכן $v(a)$=1=$\neg v(b)$, ובפרט $v(a) \not\leq v(b)$.

תזכורת: אם P קבוצה סדורה ו-$A \subseteq P$, חסם של A הוא איבר של P שגדול או שווה לכל איברי A, וחסם עליון של A הוא המינימום של כל החסמים של A (בהנחה שהוא קיים)

3. *אטום* של אלגברה בוליאנית הוא איבר $a \neq 0$ כך שאין איבר b המקיים $0 < b < a$. נניח ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית *סופית*.
   (א) הוכיחו שלכל איבר $b \neq 0$ יש אטום $a \leq b$.
   (ב) הוכיחו ש-$\mathcal{B}$ איזומורפית לאלגברת חזקה
   (ג) הוכיחו שאלגברה בוליאנית אינסופית אינה בהכרח איזומורפית לאלגברת חזקה