שאלות להגשה

1. נסמן ב-Σ את החתימה של שדות, בתוספת סימן פונקציה חד-מקומית τ. לכל ראשוני p נבחר שדה $K_p{\neq}\mathbb{F}_p$ ממציין p, ונתבונן בו כמבנה עבור Σ כאשר τ מפורש כ-$\tau(x)=x^p$. נבחר על-מסנן לא ראשי $\mathcal{F}$ על קבוצת הראשוניים, ונסמן ב-K את על המכפלה של K_p ביחס ל-$\mathcal{F}$. הוכיחו שאין פולינום $p(x)$ מעל K כך ש-$\tau^K(x){=}p(x)$ לכל $x\in K$. הוכיחו שהקבוצה $\{a\in K \mid \tau^K(a)=a\}$ היא תת-שדה אינסופי. מה קורה אם $K_p=\mathbb{F}_p$ לכל p?

2. נניח ש-$\mathcal{M}$ מבנה עם שוויון עבור חתימה Σ (עם סוג אחד, לשם הפשטות), ונניח ש-$\mathcal{N}$ מודל אחר של התורה של $\mathcal{M}$ (לאו דווקא עם שוויון)
   (א) הוכיחו ש-$=^{\mathcal{N}}$ הוא יחס שקילות על N (העולם של $\mathcal{N}$)
   (ב) הוכיחו שאם $\sim$ יחס שקילות גדיר על N^k אז $=^{\mathcal{N}}$ מעדן את $\sim$ (*יחס שקילות גדיר* על X הוא תת-קבוצה גדירה של X^2 שמהווה יחס שקילות על X. *מעדן* אומר שאם $a=^{\mathcal{N}}b$ אז $a\sim b$)
   (ג) נניח ש-$\mathcal{N}$ מבנה עבור Σ בו היחס $=^{\mathcal{N}}$ הוא יחס השקילות הגדיר הכי עדין (כמו בסעיפים הקודמים). הוכיחו שיש מבנה $\tilde{\mathcal{N}}$ עם אותה תורה כמו $\mathcal{N}$, כך ש-$=^{\tilde{\mathcal{N}}}$ הוא השוויון (*רמז:* נסחו והוכיחו טענה חזקה יותר, עבור נוסחאות)

3. נסמן ב-B את קבוצת הסדרות הממשיות החסומות (סדרה $x=(x_i)$ של ממשיים היא חסומה אם קיים ממשי b כך ש-$|x_i|<b$ לכל i). יהי $\mathcal{F}$ על-מסנן על הטבעיים. עבור סדרה ממשית $x=(x_i)$ ומספר L, נגדיר ש-$\lim_{\mathcal{F}} x=L$ אם לכל $\epsilon>0$, הקבוצה $\{i \mid |x_i-L|<\epsilon\}$ נמצאת ב-$\mathcal{F}$. הוכיחו:
   (א) לכל סדרה $x=(x_i)$ ב-B קיים L יחיד כך ש-$\lim_{\mathcal{F}} x=L$
   (ב) אם $\mathcal{F}=\mathcal{F}_i$ הוא המסנן הראשי שמכיל את $\{i\}$, אז $\lim_{\mathcal{F}} x=x_i$.
   (ג) אם $\mathcal{F}$ אינו ראשי, אז $\lim_{\mathcal{F}} x$ היא נקודת הצטברות של x (כלומר, נקודה a כך שלכל $\epsilon>0$ מתקיים $|x_i-a|<\epsilon$ עבור אינסוף איברים בסדרה). בפרט, אם ל-x יש גבול L, אז $\lim_{\mathcal{F}} x=L$.
   (ד) ההעתקה $x\mapsto\lim_{\mathcal{F}} x$ היא העתקה של חוגים מ-B ל-$\mathbb{R}$ (כאשר ב-B מחברים ומכפילים איבר-איבר)
   (ה*) נניח ש-$s:B\to\mathbb{R}$ היא העתקה של חוגים, כך שלכל $x\in B$, $s(x)$ היא נקודת הצטברות של x. אז קיים על-מסנן (בהכרח לא ראשי) כך ש-$\lim_{\mathcal{F}} x=s(x)$ לכל $x\in B$.