שאלות להגשה

1. אם $\mathcal{M}$ מבנה עבור חתימה Σ, ו-ϕ, ψ נוסחאות בחתימה זו, הוכיחו:
   (א) $(\forall x{\in}a\phi)^{\mathcal{M}}$ היא קבוצת כל ההשמות עבור $\mathscr{V}(\phi)\setminus\{x\}$ שכל הרחבה שלהן ל-x שייכת ל-$\phi^{\mathcal{M}}$.
   (ב) $(\exists x\langle\phi\to\psi\rangle)^{\mathcal{M}} = \langle\forall x\phi\to\exists x\psi\rangle^{\mathcal{M}}$

2. תהי ϕ הנוסחא $\forall y\exists z\langle y=z+z\vee y=z+z+x\rangle$ (בחתימה עם סימן פונקציה דו-מקומי $+$ ושוויון). תארו את הקבוצה $\phi^{\mathcal{M}}$, כאשר $\mathcal{M}$ הוא המבנה עם שוויון $(\mathbb{Z},+)$. הראו שהתיאור נכון, על-ידי תאור הקבוצות והפונקציות המופיעות בכל שלבי ההגדרה. מהי הקבוצה שאותה נוסחא מגדירה ב-$(\mathbb{Z}^2,+)$?

3. נניח ש-$\mathbb{T}$ תורה ספיקה, שסגורה תחת גרירה לוגית (כלומר, אם $\mathbb{T}\models\phi$ אז $\phi\in\mathbb{T}$). הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:
   1. $\mathbb{T}$ שלמה (כלומר, לכל פסוק ϕ מתקיים $\mathbb{T}\models\phi$ או $\mathbb{T}\models\neg\phi$)
   2. $\mathbb{T}=\mathbf{Th}(\mathcal{M})$ עבור מבנה $\mathcal{M}$, כאשר $\mathbf{Th}(\mathcal{M})$, *התורה של* $\mathcal{M}$, היא קבוצת הפסוקים ϕ עבורם $\phi^{\mathcal{M}}=1$.
   3. לכל שני מודלים $\mathcal{M}$ ו-$\mathcal{N}$ של $\mathbb{T}$ מתקיים $\mathbf{Th}(\mathcal{M})=\mathbf{Th}(\mathcal{N})$.
   4. $\mathbb{T}$ מקסימלית בין התורות שיש להן מודל