שאלות להגשה

1. נניח ש-$x \in \mathcal{F}(P_1)$ ו-$y \in \mathcal{F}(P_2)$, כאשר P_i שתיהן מוכלות בקבוצה P, ונסמן $P_0 = P_1 \cap P_2$. נניח ש-$\vdash \langle x \to y \rangle$. הוכיחו שקיים פסוק $z \in \mathcal{F}(P_0)$, כך ש-$\vdash \langle\langle x \to z\rangle \wedge \langle z \to y\rangle\rangle$.

רמז:

1. נניח ש-a (פסוק המייצג) אטום מעל P_0 ונסמן ב-ω את ההשמה ל-$\mathcal{F}(P_0)$ עבורה $\omega(a) = 1$. נניח ש-P קבוצה המכילה את P_0. הוכיחו שאם b פסוק מעל P כך ש-$\omega_1(b) = 0$ לכל הרחבה ω_1 של ω, אז $\neg a \vdash b$.
2. בתנאים של השאלה, הוכיחו שמספיק להראות ש-y נובע לוגית מ-

$$\Gamma = \{u \in \mathcal{F}(P_0) \mid x \models u\}$$

3. נניח שעבור השמה ω ל-P_2 מתקיים $\omega(y) = 0$. מה אפשר לומר על $\omega_1(x)$, כאשר ω_1 הרחבה כלשהי ל-P_1 של הצמצום של ω ל-P_0?

2. הוכיחו את משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: לכל סימן יחס $f \in \mathscr{F}_{w,a}$, ההעתקה

$$C_f : \mathscr{T}_{w(1)} \times \ldots \times \mathscr{T}_{w(n)} \to \mathscr{T}_a$$

היא חד-חד-ערכית.

רמז: הוכיחו ששם עצם לא יכול להיות רישא ממש של שם עצם אחר, באופן הבא. לכל מילה v באורך n, הסתכלו על הפונקציה $p_v : \{0, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}$ המוגדרת ברקורסיה על-ידי: $p_v(0) = 0$ ו-$p_v(k+1) = p_v(k) + s(k+1)$, כאשר $s(k) = 1$ אם $w(k) = '('$, $s(k) = -1$ אם $w(k) = ')'$, ו-$s(k) = 0$ בכל מקרה אחר. מה אפשר להגיד על p אם המילה v היא שם עצם?

3. נניח ש-Σ חתימה ו-$\mathscr{V}$ קבוצת משתנים, ונניח ש-U היא פונקציה מקבוצת הביטויים מעל Σ (כלומר, שמות העצם והנוסחאות מעל Σ ו-$\mathscr{V}$) למספרים השלמים המקיימת:

1. $U(\perp) = -2$
2. לכל משתנה $x \in \mathscr{V}$, $U(x) = 7$
3. לכל סימן פונקציה n-מקומי f, ולכל סדרת שמות עצם $t_1, \ldots, t_n$ (מהסוגים המתאימים), $U(f(t_1, \ldots, t_n)) = (\sum_i U(t_i)) - 4n + 1$
4. לכל סימן יחס n-מקומי R, ולכל $t_1, \ldots, t_n$ (מהסוגים המתאימים), $U(R(t_1, \ldots, t_n)) = 2(\sum_i U(t_i)) + n^3 + 4$
5. לכל שתי נוסחאות ϕ ו-ψ מתקיים $\langle \phi \to \psi \rangle = U(\phi) - U(\psi) + 10$
6. לכל נוסחה ϕ, לכל סוג a ולכל משתנה x מתקיים $U(\exists x \in a \phi) = U(\phi) - 9$

(א) הוכיחו שיש לכל היותר פונקציה U אחת המקיימת את התנאים הללו

(ב) הוכיחו שלא קיים פסוק ϕ המקיים $U(\phi) = 2024$