שאלות להגשה

1. הוכיחו שהטענות הבאות תקפות בכל אלגברה בוליאנית, לכל שני איברים a, b. יש להסתמך רק על ההגדרה, ולא על משפטים שהוכחנו.
   (א) אם $a \wedge b = a \vee b$ אז $a = b$
   (ב) $a \wedge (a \vee b) = a$
   (ג) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

2. תהי $\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית, ונגדיר לכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$ ש-$a \leq b$ אם $a \wedge b = a$.
   (א) הוכיחו שזהו סדר חלקי על $\mathcal{B}$, עם מקסימום 1 ומינימום 0.
   (ב) הוכיחו שלכל שני איברים $a, b \in \mathcal{B}$, החסם העליון ביניהם ביחס ל-$\leq$ קיים ושווה ל-$a \vee b$ והחסם התחתון קיים ושווה ל-$a \wedge b$.
   (ג) נניח ש-P קבוצה סדורה חלקית עם מקסימום 1 ומינימום 0, המקיימת:
      1. לכל שני איברים $a, b \in P$ יש חסם עליון, שנסמן $a \vee b$, וחסם תחתון שנסמן $a \wedge b$.
      2. לכל $a \in P$ קיים $b \in P$ כך ש-$a \wedge b = 0$ ו-$a \vee b = 1$.
      3. לכל $a, b, c \in P$ מתקיים:
      $$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \leq a \vee (b \wedge c)$$
      הוכיחו ש-$\langle P, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ אלגברה בוליאנית עבור פעולה יחידה $\neg$.
   (ד) הוכיחו ש-$a \leq b$ אם ורק אם לכל השמה $v : \mathcal{B} \to 2$ מתקיים $v(a) \leq v(b)$

תזכורת: אם P קבוצה סדורה ו-$A \subseteq P$, חסם של A הוא איבר של P שגדול או שווה לכל איברי A, וחסם עליון של A הוא המינימום של כל החסמים של A (בהנחה שהוא קיים)

3. *אטום* של אלגברה בוליאנית הוא איבר $a \neq 0$ כך שאין איבר b המקיים $0 < b < a$. נניח ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית *סופית*.
   (א) הוכיחו שלכל איבר $b \neq 0$ יש אטום $a \leq b$.
   (ב) הוכיחו ש-$\mathcal{B}$ איזומורפית לאלגברת חזקה
   (ג) הוכיחו שאלגברה בוליאנית אינסופית אינה בהכרח איזומורפית לאלגברת חזקה