מבוא לתורת הקבוצות

משה קמנסקי

13 ביולי 2024

1 מבוא

מטרת הקורס היא לתת מבוא לתורה של המבנים המתמטיים הכי בסיסיים, קבוצות. קבוצה A מאופיינת על-ידי אוסף האיברים ששייכים אליה: לכל עצם x, ניתן לשאול: האם x שייך ל-A? אנחנו נסמן את הטענה ש-x שייך ל-A ב-$x \in A$. הנה כמה מהשאלות בהן נתמקד:

1.1 איזה מבנים מעניינים ניתן לתאר באמצעות קבוצות?

(א) תכונות כתתי קבוצות

(ב) בניית קבוצות חדשות מקבוצות קיימות

(ג) יחסים ופעולות

1.2 איך אפשר לעבוד עם קבוצות אינסופיות?

(א) קבוצות סופיות ואינסופיות

(ב) גדלים של קבוצות אינסופיות

(ג) על מה אפשר לעשות אינדוקציה?

1.3 מהן קבוצות?

(א) הגישה האקסיומטית

(ב) הגדרה ותכונות של קבוצות מוכרות

1.4 כמה שאלות

(א) האם לכל מרחב וקטורי יש בסיס?

(ב) האם קיים מספר ממשי שאינו אלגברי?

(ג) האם קיימת פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהיא חיבורית אבל לא רציפה?

(ד) האם אפשר להגדיר באופן סביר את האורך של כל תת-קבוצה של קטע ממשי חסום?

(ה) האם כל פונקציה מהטבעיים לטבעיים ניתנת לחישוב על-ידי תכנית מחשב?

(ו) האם קיימת קבוצה של נקודות במישור שכל ישר פוגש בשתי נקודות בדיוק?

(ז) האם המישור הוא איחוד של מעגלים זרים? מה לגבי המרחב התלת-מימדי?

2 תורת קבוצות אלמנטרית (תזכורת)

2.1 פעולות בסיסיות

(א) הכלה

(ב) חיתוך, איחוד, הפרש, הפרש סימטרי

(ג) קבוצת חזקה

2.2 גרפים

מכפלה קרטזית, יחסים, פונקציות, תחום, תמונה, הרכבה, יחס הפוך

הגדרה 2.2.1. *גרף* הוא זוג $\Gamma = \langle X, R \rangle$ כאשר X קבוצה ו-$R \subseteq X \times X$ יחס מעל X. גרף

הגדרה 2.2.2. נניח ש-$\langle A, R \rangle$ ו-$\langle B, S \rangle$ שני גרפים ו-$f : A \to B$ פונקציה. אז f נקראת *העתקה* (של גרפים) אם לכל $a, a' \in A$, אם aRa' אז $f(a)Sf(a')$. אם בנוסף גם הכיוון השני נכון (כלומר לכל $a, a' \in A$, אם $f(a)Sf(a')$ אז aRa'), אז f נקראת *שיכון*. אם f העתקה שהפיכה כפונקציה, וההופכית היא גם העתקה של גרפים, אז f נקראת *איזומורפיזם*. העתקה שיכון איזומורפיזם

2.3 יחסי שקילות, מנות

הגדרה 2.3.1. *יחס שקילות* על קבוצה A הוא יחס סימטרי, טרנזיטיבי ורפלקסיבי מעל A. יחס שקילות

דוגמה 2.3.2. A קבוצת המשולשים במישור שאינם שווי שוקיים. יחס החפיפה על A הוא יחס שקילות, וכך גם יחס הדמיון. $\diamondsuit$

דוגמה 2.3.3. נניח ש-n מספר שלם, ו-$A = \mathbb{Z}$. נגדיר יחס E_n על $\mathbb{Z}$ על-ידי: mE_nk אם $n \mid m-k$, כאשר יחס החלוקה $p \mid q$ (כלומר "p מחלק את q") מתקיים אם יש l שלם עבורו $q = pl$. אז לכל n שלם, E_n יחס שקילות (תרגיל) ♢

אינטואיטיבית, יחס שקילות על A מבטא את הרעיון שאנחנו רוצים לזהות איברים שונים של A. דרך אחת שזה יכול לקרות היא שערכי פונקציה מסוימת על האיברים הללו הם זהים.

הגדרה 2.3.4. אם $f : A \to B$ פונקציה, *הגרעין* של f הוא היחס $\ker(f) = \{\langle a_1, a_2\rangle \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\}$. הגרעין

תרגיל 2.3.5. הוכיחו שלכל $f : A \to B$, הגרעין של f הוא יחס שקילות.

דוגמה 2.3.6. נניח ש-$n > 0$ שלם, ונסמן $C_n = \{0, \dots, n-1\}$. נגדיר $r_n : \mathbb{Z} \to C_n$ על-ידי: $r_n(m)$ הוא השארית של m בחלוקה ב-n (כלומר, המספר היחיד $k \in C_n$ כך ש-$m-k$ מתחלק ב-n). אז $\ker(r_n) = E_n$ מדוגמה 2.3.3 (תרגיל). ♢

נמשיך להשתמש בסימונים r_n, C_n ו-E_n מהדוגמה האחרונה גם בהמשך.

דוגמה 2.3.7. אם A קבוצת המשולשים במישור שאינם שווי שוקיים, נגדיר את $f : A \to B$ להיות הפונקציה שמתאימה לכל משולש את קבוצת אורכי הצלעות שלו (הבחירה במשולשים שאינם שווי שוקיים היא כדי להבטיח שהקבוצה הזו היא בת שלושה איברים בדיוק, ולכן ניתן לשחזר את אורכי כל הצלעות בצורה יחידה). לפי משפט החפיפה צלע-צלע-צלע, f היא העתקת מנה עבור יחס החפיפה. ♢

תרגיל 2.3.8. מצאו פונקציה f על אותה קבוצת משולשים כך ש-$\ker(f)$ הוא יחס הדמיון

יחסי שקילות מהצורה $\ker(f)$ הם נוחים במיוחד: על מנת לקבוע האם a_1 ו-a_2 שקולים, מספיק לחשב את הערכים $f(a_i)$. לכן, מעניין לשאול אילו יחסי שקילות הם מהצורה הזו. מסתבר שהתשובה היא: כולם.

משפט 2.3.9. *לכל יחס שקילות E על קבוצה A קיימת פונקציה $f : A \to B$ שהיא על, כך ש-$\ker(f) = E$. כל פונקציה כזו נקראת העתקת מנה עבור E.* העתקת מנה

על-מנת להוכיח את המשפט, נציג את המינוח הבא: אם E יחס שקילות על A, ו-$a \in A$, *מחלקת השקילות* של a היא הקבוצה $[a]_E = \{a' \in A \mid aEa'\}$. מחלקת השקילות

הוכחה. נגדיר $B = \{[a]_E \mid a \in A\}$ ו-$f : A \to B$ על ידי $f(a) = [a]_E$. □

תרגיל 2.3.10. השלימו את ההוכחה (הנקודה העיקרית היא ש-$[a_1]_E = [a_2]_E$ אם ורק אם a_1Ea_2).

הערה 2.3.11. בניגוד למקובל במקומות אחרים, אנחנו לא נשתמש במפורש בבנייה שמופיעה בהוכחת המשפט (כלומר, בקבוצת מחלקות השקילות) אלא רק במשפט עצמו. הסיבה היא שהמידע הנוסף שהבנייה הזו מספקת אינו שימושי לרוב, ומאידך הגמישות שבבחירת העתקת מנה כלשהי היא לעתים שימושית ויותר אינטואיטיבית. למשל, ראינו את העתקת המנה r_n עבור היחס E_n, שהיא יותר טבעית מהבניה בהוכחה.

כאמור, ניתן לחשוב על יחס שקילות E על A כעל מושג מוחלש של שוויון בין איברי A. מנקודת המבט הזו, העתקת מנה $f : A \to B$ "שוכחת" את המידע הלא רלוונטי על איברי A, והופכת את השוויון המוחלש לשוויון ממש: aEa' אם ורק אם $f(a) = f(a')$. לכן, ניתן לחשוב על איבר $b \in B$ כמחזיק "המידע הרלוונטי" אודות $a \in A$ עבורו $f(a) = b$ (ההנחה ש-f מבטיחה שלכל $b \in B$ אכן קיים a כזה). לכן, מעניין להבין איזה מידע מעניין על A מושרה ל-B. נדגים זאת באמצעות השימוש הבא.

שלשה פיתגורית

שלשה פיתגורית היא שלשה a, b, c של מספרים טבעיים כך ש-$a^2 + b^2 = c^2$ (לכן, הם אורכים של צלעות משולש ישר זווית). אנחנו רוצים להוכיח את הטענה הבאה:

טענה 2.3.12. *לא קיימת שלשה פיתגורית בה אורכי הניצבים a, b הם אי-זוגיים.*

על מנת להוכיח את הטענה הזו, נשתמש בטענה הבאה:

טענה 2.3.13. *נניח ש-n טבעי חיובי, ו-$\pi : \mathbb{Z} \to B$ העתקת מנה עבור E_n. אז קיימות פעולות יחידות $\oplus$ ו-$\odot$ על B המקיימות לכל $m, k \in \mathbb{Z}$ את השוויונות $\pi(m+n) = \pi(m) \oplus \pi(n)$ ו-$\pi(mn) = \pi(m) \odot \pi(n)$.*

נוכיח את הטענה הזו בהמשך. בינתיים, נשים לב שהתנאים בטענה מאפשרים לחשב את הפעולות על כל זוג איברים: למשל, כדי לחשב את $b_1 \oplus b_2$, עלינו לבחור $a_i \in A$ כך ש-$\pi(a_i) = b_i$, ולחשב את $\pi(a_1 + a_2)$. הטענה מבטיחה שהתשובה אינה תלויה בבחירה של a_i. תכונות של הפעולות הללו גם ניתן להסיק מתוך הטענה. למשל:

תרגיל 2.3.14. הוכיחו שלכל $u, v, w \in B$ מתקיים $u \oplus v = v \oplus u$, $u \odot v = v \odot u$ ו-$u \odot (v \oplus w) = (u \odot v) \oplus (u \odot w)$ (במונחים של טענה 2.3.13)

עבור $n = 4$ ו-$\pi = r_4$ כמו בדוגמא 2.3.6, אפשר בקלות לחשב את טבלת ה"חיבור" וה"כפל" ב-C_4, קבוצה בת ארבעה איברים. אנחנו בעיקר רוצים לשים לב שאם $u \in C_4$ זוגי (כלומר 0 או 2) אז $u \odot u = 0$ ואחרת $u \odot u = 1$. עכשיו אפשר להוכיח את טענה 2.3.12:

הוכחת טענה 2.3.12. נניח בשלילה שקיימים מספרים אי-זוגיים a, b ושלם c כך ש-$a^2 + b^2 = c^2$. נחשב את r_4 בשני הצדדים:

$$
\begin{aligned}
r_4(c) \odot r_4(c) = r_4(c \cdot c) = r_4(a \cdot a + b \cdot b) = \\
(r_4(a) \odot r_4(a)) \oplus (r_4(b) \odot r_4(b)) = 1 \oplus 1 = 2 \in C_4
\end{aligned}
$$

כאשר השוויון הלפני אחרון נובע מההנחה ש-a, b אי-זוגיים, ומהחישוב שעשינו לפני ההוכחה. אותו חישוב מראה שהגענו לסתירה, שכן צד שמאל חייב להיות 0 או 1. □

על-מנת להשלים את ההוכחה, עלינו להוכיח את טענה 2.3.13. נשים לב ראשית שהטענה אינה טריוויאלית: ישנן פעולות על השלמים שלא מקיימות את התכונה המקבילה.

תרגיל 2.3.15. נסמן $m \star k = m^{|k|}$ עבור מספרים שלמים m, k. הוכיחו שלא קיימת פעולה $\circledast$ על C_4 כך שלכל $m, k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $r_4(m \star k) = r_4(m) \circledast r_4(k)$.

אנחנו נוכיח את טענה 2.3.13 כמסקנה מטענה כללית על יחסי שקילות. אנחנו מתעניינים בטענה מהצורה הבאה: נתון יחס שקילות E על קבוצה A, עם העתקת מנה $\pi : A \to B$. יש לנו "מבנה מעניין" על A, ואנחנו מעוניינים להבין באיזה תנאי הוא "משרה" מבנה דומה על B. בטענה 2.3.13 המבנה המעניין היה פעולות החיבור והכפל. באופן כללי, זה יכול להיות למשל פונקציה מ-A, תת-קבוצה של A, יחס על A וכו'.

אנחנו נתמקד ראשית במקרה הפשוט של פונקציה. נתונה לנו פונקציה $g : A \to C$ (כאשר C קבוצה כלשהי). מתי הפונקציה הזו "משרה" פונקציה על B? אנחנו שואלים האם קיימת פונקציה $\bar{g} : B \to C$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $g(a) = \bar{g}(\pi(a))$ (כלומר, האם הגודל g שאנחנו מודדים על איברי A תלוי בעצם רק במידע שבאמת מעניין אותנו, כלומר בתמונה של האיבר ב-B). נשים לב שאם זה המצב, ו-a' שקול ל-a, אז $g(a) = \bar{g}(\pi(a)) = \bar{g}(\pi(a')) = g(a')$. לכן, מצאנו תנאי הכרחי. מסתבר שהוא גם תנאי מספיק:

משפט 2.3.16. *נניח ש-E יחס שקילות על קבוצה A, עם העתקת מנה $\pi : A \to B$, ונניח ש-$g : A \to C$ פונקציה כלשהי. אז התנאים הבאים שקולים:*

(א) קיימת פונקציה $\bar{g} : B \to C$ כך ש-$g = \bar{g} \circ \pi$.

(ב) לכל $a, a' \in A$, אם aEa' אז $g(a) = g(a')$ (במילים אחרות, $E \subseteq \ker(g)$).

אם התנאים מתקיימים, אז $\bar{g}$ יחידה.

סוף הרצאה 1, 1 במאי 2024

הוכחה. כיוון אחד ראינו בדיוק לפני הניסוח של המשפט. בכיוון השני, נגדיר

$$\bar{g} = \{\langle \pi(a), g(a) \rangle \mid a \in A\}$$

נוכיח ש-$\bar{g}$ פונקציה: אם $\langle u, v \rangle$ ו-$\langle u, w \rangle$ שייכים ל-$\bar{g}$ אז קיים $a \in A$ כך ש-$u = \pi(a)$ ו-$v = g(a)$ וקיים $a' \in A$ כך ש-$\pi(a') = u$ ו-$g(a') = w$. כיוון ש-$\pi(a) = u = \pi(a')$, מתקיים aEa' ולכן לפי ההנחה $g(a) = g(a')$, כלומר $v = w$.

השוויון $g = \bar{g} \circ \pi$ נובע ישירות מהבניה. העובדה ש-$\bar{g}$ מוגדרת על B ויחידה נובעת מכך ש-π על: הערך של $\bar{g}$ על כל איבר $b \in B$ נקבע על-ידי התנאי $g = \bar{g} \circ \pi$. □

למשפט יש מספר מסקנות והכללות שימושיות:

מסקנה 2.3.17. *נניח ש-E יחס שקילות על X, עם העתקת מנה $\pi_X : X \to \bar{X}$, ו-F יחס שקילות על Y, עם העתקת מנה $\pi_Y : Y \to \bar{Y}$. נניח ש-$h : Y \to X$ פונקציה. אז שני התנאים הבאים שקולים:*

(א) קיימת פונקציה $\bar{h} : \bar{Y} \to \bar{X}$ כך שלכל $y \in Y$ מתקיים $\pi_X(h(y)) = \bar{h}(\pi_Y(y))$.

(ב) לכל $y, y' \in Y$, אם yFy' אז $h(y)Eh(y')$.

הוכחה. נגדיר $g : Y \to \bar{X}$ על-ידי $g = \pi_X \circ h$. אז לכל $y, y' \in Y$ מתקיים: $g(y) = g(y')$ אם ורק אם $h(y)Eh(y')$. לכן, לפי משפט 2.3.16, התנאי השני שקול לקיומה של פונקציה $\bar{h} : \bar{Y} \to \bar{X}$ כך ש-$\bar{h} \circ \pi_Y = g = \pi_X \circ h$, כנדרש. □

דוגמה 2.3.18. נניח ש-$X = Y = \mathbb{Z}$, $E = E_2$ ו-$F = E_6$, עם העתקות מנה r_2 ו-r_6, כמו בדוגמא 2.3.6, ונניח ש-$h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ נתונה על-ידי $h(n) = 7n$. אם nFn' אז $n - n'$ מתחלק ב-6. לכן $h(n) - h(n') = 7(n - n')$ מתחלק ב-6 ולכן גם ב-2, כלומר $h(n)Eh(n')$. המסקנה מבטיחה שקיימת פונקציה (יחידה) $\bar{h} : C_6 \to C_2$ עם התכונה: $\bar{h}(r_6(n)) = r_2(7n)$ לכל $n \in \mathbb{Z}$. במלים אחרות, הזוגיות של $7n$ (שנמדדת על-ידי r_2) תלויה רק בשארית של n ביחס ל-6: אם השארית הזו ידועה, אנחנו יודעים האם $7n$ זוגי. לא קשה לחשב את $\bar{h}$: לכל $k \in C_6$ מתקיים $\bar{h}(k) = 1$ אם ורק אם k אי-זוגי (כמספר טבעי).

אפשר גם לחשוב על אותה דוגמא כאשר מחליפים בין E ו-F. במקרה הזה, אין $\bar{h}$ המקיימת $\bar{h}(r_2(n)) = r_6(7n)$: השארית של $7n$ ביחס ל-6 לא תלויה רק בזוגיות של n, איבדנו יותר מדי מידע. $\diamondsuit$

מסקנה 2.3.19. *נניח ש-E יחס שקילות על קבוצה X עם העתקת מנה $\pi : X \to \bar{X}$, וש-$h : X \times X \to X$ פונקציה. אז התנאים הבאים שקולים:*

(א) *קיימת פונקציה (יחידה) $\bar{h} : \bar{X} \times \bar{X} \to \bar{X}$ כך שלכל $x_1, x_2 \in X$ מתקיים $\bar{h}(\pi(x_1), \pi(x_2)) = \pi(h(x_1, x_2))$.*

(ב) *לכל $x_1, x_1', x_2, x_2' \in X$, אם x_1Ex_1' ו-x_2Ex_2' אז $h(x_1, x_2)Eh(x_1', x_2')$.*

לפני שנוכיח את המסקנה, נסיק ממנה את טענה 2.3.13.

הוכחת טענה 2.3.13. ניקח $X = \mathbb{Z}$ עם $E = E_n$ ו-$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ פונקציית החיבור $h(m, k) = m + k$. התנאי הראשון במסקנה 2.3.19 מבטיח פונקציה (יחידה) $\bar{h} : B \times B \to B$ כך שלכל $m, k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\pi(m + k) = \pi(h(m, k)) = \bar{h}(\pi(m), \pi(k))$, כלומר $\oplus = \bar{h}$ היא בדיוק הפונקציה שאנחנו מחפשים.

המסקנה אומרת שקיומה של הפונקציה הזו שקול לתנאי שאם mEm' וגם kEk' אז $m + kEm' + k'$. ההנחה במקרה שלנו היא ש-$m - m'$ מתחלק ב-n וגם $k - k'$ מתחלק ב-n. אם זה אכן המצב, אז גם הסכום שלהם $m - m' + k - k' = m + k - (m' + k')$ מתחלק ב-n, כנדרש.

ההוכחה עבור כפל דומה (תרגיל). $\square$

סוף הרצאה 2, 6 במאי, 2024

עכשיו נוכיח את המסקנה

הוכחת מסקנה 2.3.19. נסמן ב-F את היחס על $Y = X \times X$ הנתון על-ידי $\langle x_1, x_2\rangle F\langle x_1', x_2'\rangle$ אם x_1Ex_1' וגם x_2Ex_2'. אז F הוא הגרעין של הפונקציה $\pi_Y : X \times X \to \bar{X} \times \bar{X}$ הנתונה על-ידי $\pi_2(x_1, x_2) = \langle\pi(x_1), \pi(x_2)\rangle$ (בפרט, הוא יחס שקילות), וכיוון ש-π_Y על, זוהי העתקת מנה עבור F. עכשיו הטענה נובעת מיידית ממסקנה 2.3.17. $\square$

מסקנה 2.3.20. *נניח ש-E יחס שקילות על קבוצה X עם מנה $\pi : X \to \bar{X}$, ונניח ש-$S \subseteq X$ תת-קבוצה. אז התנאים הבאים שקולים:*

(א) *קיימת תת-קבוצה $\bar{S} \subseteq \bar{X}$ כך שלכל $x \in X$ מתקיים: $x \in S$ אם ורק אם $\pi(x) \in \bar{S}$.*

(ב) *לכל* $x, x' \in X$, *אם* xEx' *אז* $x \in S$ *אם ורק אם* $x' \in S$.

הוכחה. נגדיר $C = \{0,1\}$, ו-$g : X \to C$ *הפונקציה המציינת* של S, כלומר: $g(x) = 1$ אם ורק אם $x \in S$. אז התנאי השני שקול לתנאי השני עבור g במסקנה 2.3.17. לכן, לפי אותה מסקנה, הוא שקול לקיומה של פונקציה $\bar{g} : \bar{X} \to C$ כך ש-$g(x) = \bar{g}(\pi(x))$ לכל $x \in X$. נגדיר $\bar{S} = \bar{g}^{-1}[\{1\}]$. אז התנאי האחרון שקול לתנאי הראשון במסקנה (תרגיל). □

דוגמה 2.3.21. נניח שאני יודע מהי השארית של מספר שלם m ביחס ל-7. האם אני יכול לגלות אם m הוא זוגי? התשובה היא לא: ל-3 ול-10 זוגיות שונה, אבל אותה שארית ביחס ל-7. זהו המקרה של מסקנה 2.3.20 בו $S \subseteq X = \mathbb{Z}$ קבוצת הזוגיים.

התשובה שונה אם מחליפים את 7 ב-6: לכל שני מספרים שההפרש ביניהם מתחלק ב-6 אותה זוגיות. הקבוצה $\bar{S} \subseteq C_6$ מהמסקנה היא, במקרה הזה, $\{0, 2, 4\}$. ♢

הערה 2.3.22. נשים לב לעקרון הכללי שהשתמשנו בו בהוכחת מסקנה 2.3.20: יש התאמה טבעית בין תתי-קבוצות S של קבוצה X, ופונקציות $c : X \to \{0,1\}$. ההתאמה נתונה על-ידי: לכל תת-קבוצה $S \subseteq X$ מתאימה הפונקציה $c_S : X \to \{0,1\}$ המוגדרת כ-$c_S(x) = 1$ אם ורק אם $x \in S$. הפונקציה c_S נקראת *הפונקציה המציינת* של S. בכיוון ההפוך, אם $c : X \to \{0,1\}$ פונקציה כלשהי, מתאימה לה קבוצה $S_c = \{x \in X \mid c(x) = 1\}$. הפונקציה המציינת

תרגיל 2.3.23. הוכיחו (בסימונים של הערה 2.3.22) שלכל $S \subseteq X$ מתקיים $S = S_{c_S}$, ולכל $c : X \to \{0,1\}$ מתקיים $c = c_{S_c}$ (כלומר, שתי ההתאמות הפוכות אחת לשנייה).

לסיום, נאמר מילה על יחידות המנה והעתקת המנה. כפי שכבר ראינו, בהינתן יחס שקילות E על X, ישנן לרוב הרבה העתקות מנה עבור E (וראינו שלעתים זה מועיל). למרות זאת, נסביר בתרגיל הבא שניתן לזהות כל שתיים מהן באופן יחיד.

תרגיל 2.3.24. נניח ש-E יחס שקילות על קבוצה X, עם העתקת מנה $\pi : X \to \bar{X}$.

(א) נניח ש-$h : \bar{X} \to \bar{X}$ פונקציה המקיימת $h \circ \pi = \pi$. הוכיחו ש-h היא הזהות.

(ב) נניח ש-$\pi_1 : X \to \bar{X}_1$ העתקת מנה נוספת עבור E. הוכיחו שקיימת פונקציה יחידה $f : \bar{X} \to \bar{X}_1$ כך ש-$f \circ \pi = \pi_1$, ופונקציה יחידה $g : \bar{X}_1 \to \bar{X}$ כך ש-$g \circ \pi_1 = \pi$ (רמז: משפט 2.3.16).

(ג) הוכיחו ש-f ו-g הפוכות אחת לשניה.

בגלל התרגיל הזה, לרוב מתייחסים אל העתקת מנה שונות (עבור יחס שקילות נתון) כאל אובייקט יחיד, וקוראים לו העתקת המנה.

2.3.25 מנות במרחבים וקטוריים

נניח ש-$T : U \to V$ העתקה לינארית בין שני מרחבים וקטוריים מעל שדה k. כמו לכל פונקציה, ל-T יש גרעין $E = \ker(T) = \{\langle u_1, u_2\rangle \mid u_1, u_2 \in U, T(u_1) = T(u_2)\}$, אבל המבנה הלינארי מאפשר לרשום את התנאי האחרון כ-$T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2) = 0$, כלומר $u_1 - u_2 \in \underline{\ker}(T)$, כאשר $\underline{\ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\} \subseteq U$ היא הקבוצה שנקראת

הגרעין של T באלגברה לינארית. זוהי בדיוק מחלקת השקילות של 0 ביחס ל-E. אז המידע של E ושל $\underline{\ker}(T)$ שקול עבור העתקות לינאריות.

איזה תתי-קבוצות W של U הן מהצורה $\underline{\ker}(T)$ עבור העתקה לינארית T כלשהי? האבחנה הבסיסית היא שאם W היא גרעין של העתקה לינארית, אז W תת-מרחב וקטורי. מסתבר, שזו ההגבלה היחידה.

משפט 2.3.26. *נניח ש-W תת-מרחב וקטורי של מרחב וקטורי U מעל שדה k. אז קיים מרחב וקטורי V והעתקה לינארי $T : U \to V$ כך ש-T על ו-$\underline{\ker}(T) = W$.*

הוכחה. נגדיר יחס E על U על-ידי: $u_1 E u_2$ אם $u_1 - u_2 \in W$. זהו יחס שקילות (תרגיל). לפי משפט 2.3.9, קיימת ל-E העתקת מנה $T : U \to V$ (בפרט T על). עלינו להגדיר מבנה של מרחב וקטורי על V, עבורו T תהיה העתקה לינארית. ביתר פירוט, עלינו להראות:

(א) קיימת פעולה $\oplus : V \times V \to V$ כך שלכל $u_1, u_2 \in U$ מתקיים $T(u_1 + u_2) = T(u_1) \oplus T(u_2)$

(ב) לכל $c \in k$, קיימת פונקציה $f_c : V \to V$ (הכפלה בסקלר c), המקיימת לכל $u \in U$ ש-$T(cu) = f_c(T(u))$.

(ג) V ביחד עם הפעולות $\oplus$ והכפל בסקלרים שנתון על-ידי $c \cdot_V v = f_c(v)$ לכל $c \in k$ ו-$v \in V$ מקיימים את ההגדרה של מרחב וקטורי מעל k.

על מנת להוכיח את (ג), נשתמש במסקנה 2.3.19, עבור הנתונים $X = U$, יחס השקילות E שהגדרנו, $\bar{X} = V$ ו-$\pi = T$, כאשר $h : X \times X \to X$ פונקציית החיבור של U. התנאי הראשון באותה מסקנה מבטיח שקיימת פונקציה $\bar{h} = \oplus : V \times V \to V$ כך שלכל $u_1, u_2 \in U$ מתקיים $T(u_1) \oplus T(u_2) = \bar{h}(T(u_1), T(u_2)) = T(u_1 + u_2)$, כלומר בדיוק תנאי (ג) שלנו. לכן, מספיק להוכיח את התנאי השקול באותה מסקנה, כלומר שלכל $u_1, u_1', u_2, u_2' \in U$, אם $u_1 E u_1'$ וגם $u_2 E u_2'$ אז $u_1 + u_2 E u_1' + u_2'$. לפי הגדרת E, ההנחה פירושה ש-$u_1 - u_1' \in W$ ו-$u_2 - u_2' \in W$. כיוון ש-W תת-מרחב, הוא סגור לחיבור, ולכן גם $u_1 + u_2 - (u_1' + u_2') = (u_1 - u_1') + (u_2 - u_2') \in W$, כנדרש (השוו להוכחת טענה 2.3.13).

באופן דומה, כדי להוכיח את (ג), נקבע $c \in k$, ונשתמש במסקנה 2.3.17 עבור $X = Y = U$, $\pi_X = \pi_Y = T$ ו-$\bar{X} = \bar{Y} = V$, כאשר h היא פונקציית הכפל בסקלר ב-U, כלומר $h(u) = cu$. עלינו לבדוק שאם uEu' אז $cuEcu'$, כלומר שאם $u - u' \in W$ אז גם $cu - cu' = c(u - u') \in W$, וזה נובע מהעובדה שתת-המרחב W סגור לכפל בסקלר c.

תכונות המרחב הווקטורי נובעות בקלות ממה שכבר הוכחנו. למשל, על-מנת להוכיח ש-$v_1 \oplus v_2 = v_2 \oplus v_1$ לכל $v_1, v_2 \in V$, נבחר $u_1, u_2 \in U$ כך ש-$T(u_i) = v_i$ (זה אפשרי משום ש-T על). אז

$$v_1 \oplus v_2 = T(u_1) \oplus T(u_2) = T(u_1 + u_2) = \\ = T(u_2 + u_1) = T(u_2) \oplus T(u_1) = v_2 \oplus v_1$$

הוכחת יתר האקסיומות דומה. $\square$

תרגיל 2.3.27. השלימו את ההוכחה

מרחב מנה

מרחב V כמו במשפט נקרא *מרחב מנה* של U ב-W, ומסומן ב-U/W. ההעתקה T נקראת העתקת מנה. כמו במקרה של קבוצות, מרחב המנה והעתקת המנה אינם יחידים, אבל הם יחידים עד כדי העתקה *לינארית* יחידה:

תרגיל 2.3.28. נניח ש-$W \subseteq U$, ו-$T_1 : U \to V_1$ ו-$T_2 : U \to V_2$ שתי העתקות מנה עבור W. הוכיחו שקיימת העתקה לינארית הפיכה יחידה $S : V_1 \to V_2$ כך ש-$T_2 = S \circ T_1$.

סוף הרצאה 3, 8 במאי, 2024

2.4 יחסי סדר

יחס סדר

הגדרה 2.4.1. *יחס סדר* על קבוצה X הוא יחס רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי מעל X.

קבוצה סדורה חלקית (קס"ח)

קבוצה סדורה חלקית (קס"ח) היא זוג $\langle X, R\rangle$ כאשר X קבוצה לא ריקה, ו-R יחס סדר מעל X.

דוגמה 2.4.2. קבוצות המספרים $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ו-$\mathbb{Q}$ עם הסדר הרגיל $R = \leq$. $\diamondsuit$

דוגמה 2.4.3. אם A קבוצה כלשהי, אז $\subseteq$ הוא יחס סדר על קבוצת החזקה $X = \mathcal{P}(A)$. $\diamondsuit$

אם $\langle X, R\rangle$ קס"ח ו-$Y \subseteq X$, אז הצמצום $R\restriction_Y = R \cap (Y \times Y)$ הוא יחס סדר על Y. לעתים נמשיך לסמן R במקום $R\restriction_Y$.

דוגמה 2.4.4. המקרים הפרטיים הבאים עשויים להיות מעניינים: אם A קבוצה, נגדיר $\mathcal{F}(A) = \{B \subseteq A \mid B \text{סופית}\}$ ו-$\Phi(A) = \mathcal{F}(A) \cup \{B \subseteq A \mid A \setminus B \in \mathcal{F}(A)\}$ $\diamondsuit$

דוגמה 2.4.5. יחס החלוקה $|$ הוא יחס סדר על $\mathbb{N}$, אך אינו סדר חלקי על $\mathbb{Z}$: מתקיים $1 \mid -1$ ו-$-1 \mid 1$, למרות שהם שונים. $\diamondsuit$

דוגמה 2.4.6. נניח ש-A קבוצה. נגדיר יחס $\preceq$ על $X = \mathcal{P}(A)$ על-ידי: $B \preceq C$ אם יש קבוצה סופית D כך ש-$B \subseteq C \cup D$ (נאמר ש-B "כמעט מוכלת" ב-C במצב הזה). היחס $\preceq$ רפלקסיבי וטרנזיטיבי, אך אינו אנטי-סימטרי: למשל, לכל שתי קבוצות סופיות B, C מתקיים $B \preceq C$.

אינטואיטיבית, אם $B \preceq C$ ו-$C \preceq B$, כלומר כל אחת מהן "כמעט מוכלת" בשניה, היינו רוצים לומר שהן "כמעט שוות", ולהתייחס אליהן כאל אותו איבר. ראינו איך ניתן לעשות זאת: עלינו לחלק ביחס שקילות. בתרגיל הבא נעשה זאת באופן כללי. $\diamondsuit$

קדם סדר

תרגיל 2.4.7. נניח ש-$\preceq$ יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי על קבוצה X (יחס כזה נקרא *קדם סדר*). נגדיר יחס $\sim$ על X על-ידי: $x \sim y$ אם $x \preceq y$ וגם $y \preceq x$.

(א) הוכיחו ש-$\sim$ יחס שקילות על X.

(ב) נניח ש-$p : X \to B$ העתקת מנה עבור $\sim$. הוכיחו שקיים יחס יחיד $\leq$ על B כך שלכל $x, y \in X$ מתקיים $x \preceq y$ אם ורק אם $p(x) \leq p(y)$ (כלומר, p שיכון של הגרף $\langle X, \preceq\rangle$ ב-$\langle B, \leq\rangle$, לאו דווקא חח"ע).

(ג) הוכיחו $\leq$ יחס סדר על B.

(ד) נניח ש-$q : Y \to C$ פונקציה, ו-R יחס סדר על C. נגדיר $\tilde{R} = \{\langle x, y\rangle \in Y \times Y \mid \langle q(x), q(y)\rangle \in R\}$. הוכיחו ש-$\tilde{R}$ קדם-סדר, אך לא בהכרח סדר.

(ה) הוכיחו ש-$|$ קדם-סדר על $\mathbb{Z}$, ושפונקציית הערך המוחלט $|\cdot| : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ היא העתקת מנה עבור יחס השקילות המתאים $\sim$. תארו את יחס הסדר שמתקבל מהבנייה בסעיפים הקודמים.

(ו) הוכיחו שבדוגמא האחרונה, יחס השקילות שמתקבל מקדם הסדר הוא: $B \sim C$ אם ורק אם $B \triangle C$ סופית.

יחסי סדר הם טבעיים ונפוצים מאוד במתמטיקה, האם יש לנו אפשרות להבין, באיזשהו אופן, מהם כל יחסי הסדר? בשלב ראשון, עלינו להבין איך להשוות בין שני יחסי סדר שונים, ובפרט להבין מתי הם אותו דבר, עד כדי "שינוי שמות". כיוון שקס"ח היא מקרה פרטי של גרף, המושגים *העתקה*, *שיכון* ו*איזומורפיזם* תקפים גם עבורן. בהקשר הזה, העתקה של גרפים נקראת גם *העתקה שומרת סדר*. נשים לב לעובדה שמקילה על הבדיקה שהעתקה היא איזומורפיזם: העתקה שומרת סדר

תרגיל 2.4.8. נניח ש-$f : X \to Y$ שיכון מגרף אנטי-סימטרי $\langle X, R\rangle$ לגרף רפלקסיבי $\langle Y, S\rangle$. אז f חח"ע

בפרט, ההנחות בתרגיל חלות אם R, S יחסי סדר.

דוגמה 2.4.9. הקס"ח $X = \langle \mathcal{P}(\{2, 3, 5\}), \subseteq\rangle$ איזומורפית לקס"ח $Y = \langle \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, |\rangle$. איזומורפיזם $f : X \to Y$ נתון על-ידי $f(A) = \Pi A$, מכפלת האיברים ב-A, עם הופכית $g : Y \to X$ המוגדרת על-ידי: $g(n)$ קבוצת הגורמים הראשוניים של n. (תרגיל) $\diamondsuit$

דוגמה 2.4.10. הקס"ח $X = \langle \mathbb{Z}, \leq\rangle$ איזומורפית לקס"ח $Y = \langle \mathbb{Z}, \geq\rangle$, איזומורפיזם נתון על-ידי $f(n) = -n$. כיוון ש-$f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$, זוהי העתקה הפיכה, וההפוכה היא העתקה. $\diamondsuit$

דוגמה 2.4.11. נניח ש-A קבוצה. אז $X = \langle \mathcal{P}(A), \subseteq\rangle$ איזומורפית ל-$\langle \mathcal{P}(A), \supseteq\rangle$: העתקה $f : X \to X$ נתונה על-ידי $f(B) = A \setminus B$, וזה איזומורפיזם, שוב משום ש-$f \circ f = \mathrm{Id}_X$. $\diamondsuit$

האם כל קס"ח איזומורפית לקס"ח ההפוך? נראה ש-$\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ אינה איזומורפית ל-$\langle \mathbb{N}, \geq\rangle$, אבל איך ניתן להוכיח זאת? ב-$\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ *יש מינימום*: איבר $a = 0 \in \mathbb{N}$ כך ש-$a \leq b$ לכל $b \in \mathbb{N}$. אם f איזומורפיזם של הקס"ח לקס"ח כלשהו $\langle Y, S\rangle$, אז $f(0)$ יהיה מינימום ב-Y. לכן, אם ב-Y אין מינימום, אז Y לא יכולה להיות איזומורפית ל-$\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$. בפרט, זה המצב ב-$\langle \mathbb{N}, \geq\rangle$: מינימום בקס"ח זו הוא *מקסימום* ב-$\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$, וזה לא קיים.

את העקרון הזה ניתן להכליל: כיוון שקס"ח איזומורפיות הן "אותו קסח בשינוי שמות האיברים", כל תכונה של יחסי סדר שמוגדרת רק במונחי היחס נשמרת תחת איזומורפיזם, ולכן אם התכונה מופיעה רק באחת הקס"ח, אז הן אינן איזומורפיות.

דוגמה 2.4.12. האם $X = \langle \mathbb{N}, |\rangle$ איזומורפית לקסח ההפוך $Y = \langle \mathbb{N}, |^{-1}\rangle$? בשתיהן יש מינימום ומקסימום, אז הגישה הקודמת לא תעזור. למינימום 1 ב-X יש התכונה הבאה: קיים איבר $b \neq 1$ (ולכן בהכרח גדול ממנו), כך שאין אף איבר שנמצא *ממש* בין 1 ל-b: למשל $b = 5$ (או באופן כללי, כל ראשוני שונה מ-0). איבר b כזה נקרא *עוקב מיידי* של 1. אם קיים איזומורפיזם f מ-X ל-Y, אז $f(1) = 0$ (כי f שומר על המינימום), ואם $b \in X$ עוקב מיידי של 1, אז $f(b)$ צריך להיות עוקב מיידי של 0 ב-Y, אבל ל-0 אין עוקבים מידיים ב-Y (תרגיל). $\diamondsuit$

ננסח את ההגדרה שהופיעה בדוגמא.

הגדרה 2.4.13. נניח ש-$\langle X, \preceq \rangle$ קס"ח.

(א) איבר $a \in X$ נקרא *איבר מינימלי (מזערי)* אם לא קיים $b \neq a$ ב-X כך ש-$b \preceq a$. איבר מינימלי (מזערי)

(ב) אם $a \in X$ איבר כלשהו, *עוקב* של a הוא איבר $b \in X$ המקיים $a \preceq b$ ו-$b \neq a$. *עוקב מיידי* של a הוא איבר מינימלי בקבוצת העוקבים של a. עוקב, עוקב מיידי

(ג) המושגים *איבר מקסימלי (מירבי)*, *קודם* ו*קודם מיידי* מוגדרים כמושגים המקבילים עבור הסדר ההפוך $\preceq^{-1}$. איבר מקסימלי (מירבי), קודם, קודם מיידי

תרגיל 2.4.14. הוכיחו ש-b עוקב מיידי של a אם $a \preceq b$, $a \neq b$ ולכל $c \in X$, אם $c \preceq b$ ו-$a \preceq c$ אז $c = a$ או $c = b$.

כאמור, כל תכונה של סדר (או, באופן כללי, של גרפים) נשמרת על-ידי איזומורפיזמים. אין לנו (כרגע) אפשרות לנסח במדויק מה זה "תכונה של סדר", ולכן נסתפק בדוגמאות. הטענה הבאה מנוסחת עבור המושגים שהזכרנו עד כה, אבל נכונה גם ליתר התכונות שמופיעות בהמשך.

טענה 2.4.15. *נניח ש-$\langle X, R \rangle$ ו-$\langle Y, S \rangle$ שני גרפים, ו-$f : X \to Y$ איזומורפיזם.*

(א) *X רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי, או טרנזיטיבי אם ורק אם Y כזה. בפרט, X קס"ח אם ורק אם Y קס"ח.*

(ב) *$a \in X$ מינימום, מקסימום, מינימלי או מקסימלי אם ורק אם $f(a) \in Y$ הוא כזה. בפרט, ב-X יש מינימום אם ורק אם ב-Y הוא ישנו, ובדומה עבור התכונות האחרות.*

(ג) *$b \in X$ עוקב מיידי של $a \in X$ אם ורק אם $f(b)$ עוקב מיידי של $f(a)$ (ובדומה עבור קודם מיידי).*

הערה 2.4.16. ההגדרות של מינימום, מינימלי וכו' נוסחו עבור קבוצות סדורות, אבל הן תקפות לגרפים כלשהם.

הוכחה. נוכיח עבור עוקבים מידיים. נשתמש בניסוח בתרגיל 2.4.14. נניח ש-$a, b \in X$ ו-b עוקב מיידי של a. עלינו להוכיח ש-$f(a)Sf(b)$, ש-$f(a) \neq f(b)$, ושלכל $d \in Y$, אם $f(a)Sd$ ו-$dSf(b)$, אז $d = f(a)$ או $d = f(b)$. התנאי הראשון נובע ישירות מכך ש-f העתקה, והשני מכך ש-f חח"ע. נסמן ב-g את ההפכית של f, ונשתמש ב-f וב-g על-מנת לתרגם את הבעיה מ-Y ל-X.

נסמן $c = g(d)$. כיוון ש-$f(a)Sd$ ו-g העתקה, $g(f(a))Rg(d) = c$. כיוון ש-g הפוכה ל-f, מתקיים $g(f(a)) = a$. לכן aRc. באופן דומה, $c = g(d)Rg(f(b)) = b$. כיוון ש-b עוקב מיידי של a, נובע מזה ש-$c = a$ או $c = b$. לכן, $f(a) = f(c) = f(g(d))$ או $f(b) = f(c) = f(g(d))$. שוב כיוון ש-f ו-g הפוכות, $d = f(b)$ או $d = f(a)$ כנדרש. $\square$

תרגיל 2.4.17. הוכיחו את הסעיפים האחרים

הערה 2.4.18. במונחים של הסעיף הקודם, אפשר לנסח את הטענה כך: היחס "X איזומורפי ל-Y" הוא יחס שקילות על האוסף $\mathcal{G}$ של כל הגרפים (או על אוסף כל הקס"חים). אם $\pi : \mathcal{G} \to \mathcal{B}$ העתקת מנה עבורו, התכונות מהטענה (כמו קיום מינימום) מוגדרות על $\mathcal{B}$.

סוף הרצאה 4, 15 במאי 2024

אם $\langle X, \preceq\rangle$ קסח, נסמן ב-$\prec$ את היחס $\preceq \setminus \mathrm{Id}_X$.

דוגמה 2.4.19. הקס"חים $\mathbb{Z}$ ו-$\mathbb{Q}$ אינם איזומורפיים: ב-$\mathbb{Z}$ לכל איבר יש עוקב מיידי, וב-$\mathbb{Q}$ לאף איבר אין. $\diamondsuit$

צפופה

הגדרה 2.4.20. נניח ש-$\langle X, \preceq\rangle$ קס"ח. נאמר ש-X היא *צפופה* אם לכל $x, y \in X$, אם $x \prec y$ אז יש $a \in X$ כך ש-$x \prec a \prec y$.

דוגמה 2.4.21. $\mathbb{Q}$ צפופה, אבל $\mathbb{Z}$ לא (עם הסדר הרגיל) $\diamondsuit$

תרגיל 2.4.22. קסח X היא צפופה אם ורק אם לאף איבר ב-X אין עוקב מיידי.

ניתנים להשוואה
קווי
מלא

הגדרה 2.4.23. שני איברים x, y בקסח $\langle X, \preceq\rangle$ *ניתנים להשוואה* אם מתקיים $x \preceq y$ או $y \preceq x$. הקסח X נקרא *קווי* (או *מלא*) אם כל שני איברים ב-X ניתנים להשוואה.

דוגמה 2.4.24. $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$ אינה איזומורפית ל-$\langle \mathbb{N}_+, |\rangle$ (כאשר $\mathbb{N}_+$ הטבעיים החיוביים): $\leq$ הוא קווי ו-$|$ לא. $\diamondsuit$

עבור סדרים קוויים, הכיוון ההפוך לתרגיל 2.4.8 תקף:

תרגיל 2.4.25. אם $f : X \to Y$ העתקה חח"ע שומרת סדר מסדר קווי X לקס"ח Y, אז f שיכון.

אינטואיטיבית, יחסי סדר קוויים הם "גדולים": הם מחליטים על הכי הרבה זוגות. לכן, טבעי לשאול, האם כל יחס סדר ניתן להרחבה לסדר קווי. הטענה הבאה מאפשרת לנסח את השאלה מחדש.

נניח ש-X קבוצה, ונסמן ב-$\mathcal{O}(X)$ את קבוצת כל יחסי הסדר על X. זוהי תת-קבוצה של $\mathcal{P}(X \times X)$ ולכן סדורה על-ידי הכלה.

טענה 2.4.26. *יחס סדר $\preceq$ על קבוצה X הוא קווי אם ורק אם הוא איבר מירבי ב-$\mathcal{O}(X)$.*

לכן, אפשר להמיר את השאלה "האם $\preceq$ ניתן להרחבה לסדר קווי?" בשאלה "האם יש יחס סדר על X שמרחיב את $\preceq$ והוא מירבי ביחס להכלה?". בהמשך (טענה 5.4.2) נענה על השאלה הזו.

על-מנת להוכיח את הטענה, נשתמש בתרגיל הבא:

תרגיל 2.4.27. נניח ש-$\preceq$ יחס סדר על X, ונניח ש-$x, y \in X$ לא מקיימים $x \preceq y$. אז קיים יחס סדר $\preceq_1$ על X שמרחיב את $\preceq$, כך ש-$y \preceq_1 x$.

הוכחת הטענה. נניח ש-$\preceq$ קווי, ונניח בשלילה שיש איבר $\preceq'$ ב-$\mathcal{O}(X)$ שמרחיב את $\preceq$. אז יש $x, y \in X$ כך ש-$y \preceq' x$ אבל $\neg x \preceq y$. כיוון ש-$\preceq$ קווי, נובע מזה ש-$x \preceq y$, ולכן גם $x \preceq' y$, בסתירה לאנטי-סימטריות של $\preceq'$.

בכיוון השני, נניח ש-$\preceq$ מירבי ב-$\mathcal{O}(X)$, אבל לא קווי. אז יש $x, y \in X$ שלא ניתנים להשוואה לפי $\preceq$. לפי התרגיל האחרון, קיים $\preceq_1$ שמרחיב את $\preceq$ כך ש-$y \preceq_1 x$. זו סותר את המירביות. $\square$

ראינו מספר דוגמאות מעניינות של תתי-קבוצות סדורות של קבוצות חזקה. נראה עכשיו שניתן לשכן *כל* קבוצה סדורה בקבוצת חזקה. לשם כך, נתבונן על *רישות* של קבוצה סדורה:

רישא

הגדרה 2.4.28. אם $\langle X, \preceq\rangle$ קס"ח, *רישא* של X היא תת-קבוצה $A \subseteq X$ המקיימת: אם $a \in A$ ו-$b \in X$ כך ש-$b \preceq a$, אז $b \in A$.

לכל $x \in X$, נסמן $X^{\preceq x} = \{y \in X \mid y \preceq x\}$ ו-$X^{\prec x} = \{y \in X \mid y \prec x\}$. אלה הן רישות של X (תרגיל).

נסמן ב-$\mathcal{I}(X)$ את קבוצת כל הרישות של X. זוהי תת-קבוצה של $\mathcal{P}(X)$, ולכן סדורה על-ידי הכלה.

כמובן ש-$\mathcal{I}(X)$ תלויה גם ביחס הסדר $\preceq$ על X, ולא רק בקבוצה X.

תרגיל 2.4.29. נניח ש-$\langle X, \preceq\rangle$ קס"ח. הוכיחו:

(א) חיתוך של שתי רישות של X הוא רישא.

(ב) הפונקציה $f : X \to \mathcal{I}(X)$ הנתונה על-ידי $f(x) = X^{\preceq x}$ היא שיכון חח"ע, אך אינה על.

(ג) אם X סדורה קווית, אז גם $\mathcal{I}(X)$ סדורה קווית.

2.4.30 חסמים עליונים

נניח ש-A קבוצה אינסופית. האם $\mathcal{P}(A)$ איזומורפית ל-$\Phi(A)$? התכונות שראינו עד כה לא מאפשרות להבדיל ביניהן.

האיחוד האונרי

נזכיר שאם $\mathcal{C}$ היא קבוצה של קבוצות, *האיחוד האונרי* של $\mathcal{C}$ הוא הקבוצה $\bigcup \mathcal{C} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{C} x \in A\}$. אם $\mathcal{C}$ תת-קבוצה של $\Phi(A)$ (ולכן בפרט של $\mathcal{P}(A)$), אז $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{P}(A)$, אבל לא בהכרח ב-$\Phi(A)$. האם אפשר להשתמש באבחנה הזו כדי להבדיל בין שתי הקבוצות הסדורות? לשם כך, עלינו להבין האם אפשר לתאר את $\bigcup \mathcal{C}$ באמצעות הסדר.

נשים לב ש-$\bigcup \mathcal{C}$ מאופיינת באמצעות שתי התכונות הבאות:

(א) לכל $A \in \mathcal{C}$ מתקיים $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$

(ב) אם B קבוצה כלשהי אם התכונה שלכל $A \in \mathcal{C}$ מתקיים $A \subseteq B$, אז $\bigcup \mathcal{C} \subseteq B$.

תרגיל 2.4.31. הוכיחו ש-$\bigcup \mathcal{C}$ אכן מקיימת את שתי התכונות הנ"ל, ושהתכונות הללו מאפיינות אותה, כלומר: אם D קבוצה נוספת שמקיימת את שתי התכונות הנ"ל, אז $\bigcup \mathcal{C} = D$.

כיוון ש-$\subseteq$ הוא יחס הסדר על $\mathcal{P}(A)$, האבחנה הנ"ל מספקת תיאור של $\bigcup \mathcal{C}$ במונחים של יחס הסדר. תיאור זה ניתן להכליל:

חסם מלעיל
חסם עליון
חסם מלרע
חסם תחתון

הגדרה 2.4.32. נניח ש-$\langle X, \preceq\rangle$ קס"ח, ו-$\mathcal{C} \subseteq X$. *חסם מלעיל* של $\mathcal{C}$ הוא איבר $b \in X$ המקיים $a \preceq b$ לכל $a \in \mathcal{C}$. *חסם עליון* של $\mathcal{C}$ הוא המינימום של קבוצת כל החסמים מלעיל של $\mathcal{C}$ (אם הוא קיים). המושגים המקבילים עבור הסדר ההפוך נקראים *חסם מלרע* ו*חסם תחתון*.

כלומר, חסם עליון של $\mathcal{C}$ הוא איבר $b \in X$ המקיים: $a \preceq b$ לכל $a \in \mathcal{C}$ ו-$b \preceq c$ לכל חסם מלעיל c של $\mathcal{C}$. נדגיש ש-b לא חייב להיות איבר של $\mathcal{C}$. כיוון שמינימום של קבוצה הוא יחיד, לכל תת-קבוצה יש לכל היותר חסם עליון אחד.

תרגיל 2.4.33. אם ל-$\mathcal{C}$ יש חסם עליון ששייך ל-$\mathcal{C}$ אז הוא המקסימום של $\mathcal{C}$. אם ל-$\mathcal{C}$ יש מקסימום, אז הוא גם החסם העליון של $\mathcal{C}$.

דוגמה 2.4.34. 1 הוא החסם העליון של הקטע הפתוח $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ ב-$\mathbb{Q}$. $\diamondsuit$

דוגמה 2.4.35. לכל קבוצה A, ולכל $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$, הקבוצה $\bigcup \mathcal{C}$ היא החסם העליון של $\mathcal{C}$. $\diamondsuit$

דוגמה 2.4.36. נסמן $\mathcal{C} = \{\{2n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Phi(\mathbb{N})$ (קבוצת היחידונים של מספרים זוגיים). האיחוד $\bigcup \mathcal{C}$ הוא החסם העליון של $\mathcal{C}$ כתת-קבוצה של $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, אך אינו שייך ל-$\Phi(\mathbb{N})$. זה לא אומר שאין לא חסם עליון שם: אולי יש איבר אחר שהוא החסם העליון שלו שם.

נניח בשלילה שיש ל-$\mathcal{C}$ חסם עליון B ב-$\Phi(\mathbb{N})$. אז B קבוצה סופית, או שהמשלימה שלה סופית. המקרה הראשון אינו אפשרי, משום ש-B כוללת כל מספר זוגי. במקרה השני, ב-B יש לפחות מספר אי-זוגי אחד k (כל מספר אי-זוגי שאינו במשלימה של B). אבל אז גם $B \setminus \{k\}$ כוללת את כל הזוגיים, בסתירה למינימליות של B.

מצאנו תת-קבוצה של $\Phi(\mathbb{N})$ שאין לה חסם עליון, ולכן $\Phi(\mathbb{N})$ אינה איזומורפית ל-$\mathcal{P}(\mathbb{N})$. $\diamondsuit$

תרגיל 2.4.37. הוכיחו שהתכונה "לכל תת-קבוצה יש חסם עליון" של קבוצות סדורות נשמרת תחת איזומורפיזם.

לתכונה שלכל תת-קבוצה יש חסם עליון יש השלכות מעניינות. נניח ש-$f : X \to X$ פונקציה מקבוצה X לעצמה. במצב הזה טבעי ומעניין לשאול האם יש איבר $x \in X$ כך ש-$f(x) = x$. איבר כזה נקרא *נקודת שבת של* f. בהקשר שלנו, ישנה הטענה הכללית הבאה: נקודת שבת

טענה 2.4.38. *נניח ש-$\langle X, \preceq \rangle$ קס"ח בה לכל תת-קבוצה יש חסם עליון, ונניח ש-$f : X \to X$ שומרת סדר. אז ל-f יש נקודת שבת.*

הוכחה. נסמן $\mathcal{C} = \{x \in X \mid x \preceq f(x)\}$. לפי ההנחה, ל-$\mathcal{C}$ יש חסם עליון a. נוכיח ש-a נקודת שבת של f.

נניח ש-$x \in \mathcal{C}$. אז $x \preceq a$ משום ש-a חסם (מלעיל) של $\mathcal{C}$. כיוון ש-f שומרת סדר, $f(x) \preceq f(a)$, וכיוון ש-$x \in \mathcal{C}$, מקבלים $x \preceq f(x) \preceq f(a)$. הוכחנו ש-$f(a)$ חסם מלעיל של $\mathcal{C}$, ולכן החסם העליון a קודם לו, $a \preceq f(a)$.

בפרט, $a \in \mathcal{C}$. כעת, נשים לב שלכל $x \in \mathcal{C}$ גם $f(x) \in \mathcal{C}$: כיוון ש-$x \preceq f(x)$, הפעלת f נותנת $f(x) \preceq f(f(x))$. בפרט, $f(a) \in \mathcal{C}$. כיוון ש-a חסם מלעיל של $\mathcal{C}$ ו-$f(a) \in \mathcal{C}$, מקבלים $f(a) \preceq a$. בסה"כ, הוכחנו אי-שוויון לשני הכיוונים, אז $a = f(a)$. $\square$

ראינו מספר תכונות שמאפשרות לנו להוכיח שקבוצות סדורות לא איזומורפיות. אם אנחנו רוצים להוכיח ששתי קבוצות סדורות הן כן איזומורפיות, האופן היחיד שיש לנו כרגע הוא למצוא איזומורפיזם ספציפי, וזה לעתים קשה. היה יותר נוח אם היינו יכולים לאפיין קבוצות סדורות באמצעות התכונות שלהן. למשל, נניח שנתונה קס"ח $\langle X, \preceq \rangle$ כך ש-$\preceq$ סדר קווי, X צפופה וללא מינימום או מקסימום. דוגמא אחת לקבוצה כזו היא $\mathbb{Q}$, עם הסדר הרגיל, אבל עוד דוגמא היא תת-הקבוצה של $\mathbb{Q}$ המורכבת ממספרים קטנים מ-1 וגדולים מ-0. האם קבוצה כזו בהכרח איזומורפית

ל-$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$? על מנת שזה יקרה, הכרחי כמובן שקיימת בכלל פונקציה הפיכה מ-X ל-$\mathbb{Q}$ (ללא שום תנאים על הסדר). תחת ההנחה הזו, אנחנו נראה בהמשך שהתשובה היא "כן".

סוף הרצאה 5, 20 במאי 2024

3 המספרים הטבעיים

3.1 הגדרות וכלים

המטרה שלנו היא לתאר, עד כדי איזומורפיזם, את קבוצת המספרים הטבעיים כקבוצה סדורה. למעשה, נשיג יותר: נראה שהאיזומורפיזם יחיד. התיאור כלול בהגדרה הבאה:

מודל של הטבעיים

הגדרה 3.1.1. *מודל של הטבעיים* הוא קס"ח $\langle M, \preceq \rangle$ המקיימת:

(א) ב-M אין מקסימום

(ב) לכל איבר שאינו מינימום יש קודם מיידי

עקרון המינימום

(ג) *עקרון המינימום*: בכל תת-קבוצה לא ריקה של M יש מינימום

למעשה, ההנחה ש-$\preceq$ יחס סדר מיותרת:

תרגיל 3.1.2. נניח ש-R יחס על קבוצה X כך שלכל תת-קבוצה לא ריקה $A \subseteq X$ קיים $a \in A$ יחיד עבורו aRb לכל $b \in A$. הוכיחו ש-R סדר קווי על X, שמקיים את עקרון המינימום.

תרגיל 3.1.3. הוכיחו שיחס סדר $\preceq$ על X מקיים את עקרון המינימום אם ורק אם אין שיכון מקבוצה סדורה קווית שאין בה מינימום ל-X.

עד סיום הסעיף, נקבע מודל $\langle M, \preceq \rangle$ של הטבעיים.

טענה 3.1.4. *לכל איבר $m \in M$ יש עוקב יחיד*

הוכחה. עבור $m \in M$, נתבונן ב-$A = \{n \in M \mid m \prec n\}$. כיוון ש-$m$ אינו מקסימלי, A אינה ריקה, ולכן לפי עקרון המינימום יש לה מינימום a. לפי הגדרת העוקב המיידי, a עוקב מיידי של m. יחידות העוקב (אם הוא קיים) תקפה בכל סדר קווי (תרגיל). □

לפי עקרון המינימום, ב-M עצמה יש מינימום, אותו נסמן ב-0, ולפי הטענה האחרונה ישנה פונקציית עוקב $s : M \to M$ (שמתאימה לכל איבר את העוקב שלו). אם מדובר על יותר ממודל אחד של הטבעיים, נסמן 0_M ו-s_M במקום 0 ו-s.

אינדוקציה

איך ניתן להוכיח טענות על מודלים של הטבעיים? הכלי העיקרי הוא *אינדוקציה*.

משפט 3.1.5 (אינדוקציה רגילה). *נניח ש-$P \subseteq M$ מקיימת: $0 \in P$ ולכל $n \in P$ גם $s(n) \in P$. אז $P = M$.*

בהקשר הזה, נוח לחשוב שמנסים להוכיח שתכונה כלשהי תקפה עבור כל איברי M, ואז P היא קבוצת האיברים עבורם התכונה נכונה. המשפט אומר שמספיק להוכיח שהתכונה תקפה עבור 0 (בסיס האינדוקציה) ושלכל $m \in M$, אם היא תקפה עבור m אז היא תקפה עבור $s(m)$ (צעד האינדוקציה).

הוכחה. נסמן $A = M \setminus P$. אם $P \neq M$, אז A לא ריקה, ולכן יש לה מינימום a. לא יתכן ש-$a = 0$ כי $0 \in P$. לכן, ל-a יש קודם מיידי $b \in M$. כיוון ש-$b \prec a$ ו-a המינימום של A, לא יתכן ש-$b \in A$, ולכן $b \in P$. לכן, לפי ההנחה, גם $s(b) \in P$. אבל $s(b) = a \in A$, וקיבלנו סתירה. $\square$

למעשה, האפשרות להוכיח טענות באינדוקציה *מאפיינת* מודלים של הטבעיים, במובן הבא:

תרגיל 3.1.6. נניח ש-$\langle X, \trianglelefteq \rangle$ קבוצה סדורה בסדר קווי, עם מינימום x_0, ונניח שלכל איבר x ב-X יש עוקב מיידי $t(x)$. נניח שעקרון האינדוקציה מתקיים ב-X: לכל תת-קבוצה $P \subseteq X$, אם $x_0 \in P$ ולכל $x \in P$ גם $t(x) \in P$, אז $P = X$. הוכיחו ש-$\langle X, \trianglelefteq \rangle$ מודל של הטבעיים.

עקרון מועיל נוסף הוא אינדוקציה שלמה. הסימונים במשפט הם מהגדרה 2.4.28.

משפט 3.1.7 (אינדוקציה שלמה). *נניח ש-$\langle X, \trianglelefteq \rangle$ קס"ח. אז שני התנאים הבאים שקולים:*

(א) עקרון המינימום: בכל תת-קבוצה לא ריקה של X יש מינימום

(ב) אינדוקציה שלמה: $\trianglelefteq$ קווי, ולכל $P \subseteq X$, אם לכל $a \in X$ עבורה $X^{\lhd a} \subseteq P$ גם $a \in P$, אז $P = X$.

הוכחה. נניח את עקרון המינימום, ונניח ש-P מקיימת את ההנחה של אינדוקציה שלמה. אם $P \neq M$, אז $A = M \setminus P$ לא ריקה, ולכן יש בה מינימום a. אז $M^{\lhd a} \subseteq P$. לפי ההנחה $a \in P$, בסתירה להנחה ש-a המינימום של A.

נניח עכשיו שהסדר קווי ואת עקרון האינדוקציה השלמה, ונניח שב-$A \subseteq X$ אין מינימום. נגדיר $P = X \setminus A$. אם $a \in X$ מקיים $M^{\lhd a} \subseteq P$, אז $a \notin A$, כי אחרת a מינימלי ב-A וכיוון שהסדר קווי, הוא גם מינימום שם. לפי אינדוקציה שלמה, $P = M$ ולכן A ריקה. $\square$

דוגמה 3.1.8. נוכיח שכל מספר טבעי חיובי הוא מכפלה של ראשוניים. נסמן ב-P את קבוצת הטבעיים שהם 0 או מכפלה של ראשוניים. נניח ש-n טבעי, ונניח שלכל $k < n$, הטענה נכונה (כלומר $k \in P$). אם n ראשוני (או 0) הטענה ברורה. אחרת, $n = k \cdot l$ עבור $k, l < n$. לפי ההנחה, $k, l \in P$ ולכן כל אחד מהם מכפלה של ראשוניים ולכן גם n. $\diamondsuit$

3.2 הגדרה ברקורסיה

ראינו איך להוכיח טענות על מודלים של הטבעיים, אבל המטרה שלנו היא *לבנות* העתקה. המשפט הבא מספק כלי כללי לבניית העתקות ממודל של הטבעיים. הרעיון הוא שאם $t : A \to A$ פונקציה כלשהי, ו-$a \in A$, יש פונקציה מ-M ל-A ששולחת את $m \in M$ ל-"t מופעלת m פעמים על a".

משפט 3.2.1 (הגדרה ברקורסיה). *נניח ש-$t : A \to A$ פונקציה כלשהי, ו-$a \in A$. אז קיימת פונקציה יחידה $f : M \to A$ עם התכונות:*

(א) $f(0) = a$

(ב) לכל $m \in M$ מתקיים $f(s(m)) = t(f(m))$.

סדרה
נוסחת נסיגה

פונקציה מהטבעיים (או ממודל של הטבעיים) ל-A נקראת גם *סדרה* (עם ערכים ב-A). תיאור הסדרה במונחים של המשפט נקרא גם *נוסחת נסיגה*.

דוגמה 3.2.2. נניח ש-$t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ נתונה על-ידי $t(x) = \pi x$. מהמשפט נובע שקיימת פונקציה יחידה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ כך ש-$f(0) = 1$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n+1) = \pi \cdot f(n)$. זוהי פונקציית החזקה, $f(n) = \pi^n$. ◊

נוכיח את המשפט בהמשך. בשלב זה, נראה שהמשפט נותן לנו את התוצאה על יחידות הטבעיים. לשם כך, נניח שנתון מודל נוסף של הטבעיים, $\langle N, \trianglelefteq \rangle$, עם מינימום $*$ ופונקציית עוקב $t : N \to N$.

מסקנה 3.2.3. *קיימת פונקציה יחידה $f : M \to N$ כך ש-$f(0) = *$ ו-$f(s(m)) = t(f(m))$ לכל $m \in M$.*

הוכחה. נשתמש במשפט ההגדרה ברקורסיה עבור $A = N$, $a = *$ ו-t. □

קיבלנו פונקציה, אבל לא ברור שהיא הפיכה. לשם כך, נשים לב:

מסקנה 3.2.4. *אם $h : M \to M$ מקיימת $h(0) = 0$ ו-$h(s(m)) = s(h(m))$ לכל $m \in M$, אז h פונקציית הזהות על M.*

הוכחה. נשתמש במשפט עבור $A = M$, $a = 0$ ו-$t = s$. מהיחידות במשפט נקבל שיש רק פונקציה אחת h עם התכונות הרצויות. כיוון שהזהות מספקת את הדרישות הללו, h היא בהכרח הזהות. □

מסקנה 3.2.5. *הפונקציה ממסקנה 3.2.3 היא הפיכה*

הוכחה. לפי מסקנה 3.2.3 עבור המודל N, קיימת פונקציה $g : N \to M$ המקיימת $g(*) = 0$ ו-$g(t(n)) = s(g(n))$ לכל $n \in N$. ההרכבה $h = g \circ f$ מקיימת $h(0) = g(f(0)) = g(*) = 0$ ולכל $m \in M$,

$$h(s(m)) = g(f(s(m))) = g(t(f(m))) = s(g(f(m))) = s(h(m))$$

לפי מסקנה 3.2.4, h היא הזהות, ובאופן דומה עבור ההרכבה $f \circ g$. □

על-מנת להוכיח ש-M ו-N איזומורפיים, נותר להראות שהפונקציות f ו-g שהוגדרו הן שומרות סדר. נראה זאת באופן יותר כללי.

טענה 3.2.6. *נניח ש-$\langle M, \preceq \rangle$ מודל של הטבעיים, ו-$\langle X, \trianglelefteq \rangle$ קבוצה סדורה כלשהי. נניח ש-$f : M \to X$ פונקציה המקיימת $f(m) \lhd f(s(m))$ לכל $m \in M$. אז f היא פונקציה עולה: $f(n) \lhd f(m)$ לכל $n \prec m$.*

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על m שלכל $n \in M$, אם $n \prec m$ אז $f(n) \lhd f(m)$. עבור $m = 0$ הטענה נכונה באופן ריק.

נניח שהטענה נכונה עבור m, ונניח ש-$n \prec s(m)$. אז $n \preceq m$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה $f(n) \trianglelefteq f(m)$. מאידך, לפי ההנחה $f(m) \prec f(s(m))$, אז סיימנו. □

מסקנה 3.2.7. *לכל שני מודלים* $\langle M, \preceq\rangle$ *ו-*$\langle N, \trianglelefteq\rangle$ *קיים איזומורפיזם סדר יחיד* $f : M \to N$

הוכחה. לפי מסקנה 3.2.5 קיימת פונקציה הפיכה $f : M \to N$ ששומרת על 0 ועל העוקב (כמו במסקנה 3.2.3), וההפוכה גם מקיימת שומרת על 0 ועל העוקב. לפי טענה 3.2.6, אלה הן העתקות שומרות סדר.

היחידות נובעת מכך שכל איזומורפיזם לוקח את המינימום למינימום ועוקבים לעוקבים, ולכן היא נובעת מהיחידות במסקנה 3.2.3. □

המסקנה האחרונה מראה שיש *לכל היותר* מודל אחד של הטבעיים. לא ברור כרגע שמודל כזה אכן קיים. נדון על כך בהמשך, אבל בשלב זה נניח שמודל כזה אכן קיים, וכיוון שהוא יחיד מכל בחינה מעשית, אפשר לסמן אותו, כרגיל ב-$\mathbb{N}$. באופן דומה, נכתוב $n+1$ במקום $s(n)$ (למרות שעדיין לא הגדרנו חיבור, גם את זה נעשה בהמשך).

3.2.8 עוד גרסאות של הגדרה ברקורסיה

ישנן גרסאות טבעיות נוספות של הגדרה ברקורסיה, שלא מכוסות ישירות על-ידי המשפט המקורי, אבל את כולן ניתן לקבל כמסקנה.

פונקציית העצרת

דוגמה 3.2.9. *פונקציית העצרת* היא הפונקציה שמתאימה למספר טבעי n את מספר התמורות של הקבוצה $\{1, \dots, n\}$ (כלומר, פונקציות הפיכות מהקבוצה אל עצמה). מספר זה מסומן על-ידי $n!$. לא קשה לראות ש-$0! = 1$ ושלכל n טבעי, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$. היינו רוצים להסיק ממשפט ההגדרה ברקורסיה שהתנאים הללו *מגדירים* פונקציית העצרת, אבל הניסוח של המשפט לא מאפשר לעשות זאת בנוחות, משום שהפונקציה t במשפט תלוי רק ב-$f(n)$ ולא ב-n. ♢

מסקנה 3.2.10. *נניח ש-A קבוצה, $a \in A$ ו-$t : \mathbb{N} \times A \to A$ פונקציה כלשהי. אז קיימת פונקציה יחידה $f : \mathbb{N} \to A$ עם התכונות:*

(א) $f(0) = a$

(ב) $f(n+1) = t(n, f(n))$

תרגיל 3.2.11. הסיקו את מסקנה 3.2.10 מתוך משפט 3.2.1. הסבירו איך המסקנה מאפשרת להגדיר את פונקציית העצרת.

סוף הרצאה 6, 22 במאי 2024

סדרת פיבונצ'י

סדרה מפורסמת נוספת שמוגדרת על-ידי נוסחת נסיגה היא *סדרת פיבונצ'י*. זוהי פונקציה $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ בעלת התכונות $\phi(0) = \phi(1) = 1$ ו-$\phi(n+2) = \phi(n+1) + \phi(n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$. משפט 3.2.1 לא מבטיח שזו הגדרה תקינה של פונקציה, משום שהנוסחה תלויה בשני ערכים קודמים ולא אחד.

תרגיל 3.2.12. נניח ש-A קבוצה, $k \geq 1$ טבעי, $a_0, \dots, a_{k-1} \in A$ ו-$t : A^k \to A$ פונקציה. הוכיחו שקיימת פונקציה יחידה $f : \mathbb{N} \to A$ כך ש-$f(i) = a_i$ לכל $i < k$, ו-$f(n+k) = t(f(n), \dots, f(n+k-1))$ לכל n. הסבירו איך הטענה מאפשרת להגדיר את סדרת פיבונצ'י

בגרסא הכי כללית שנראה, נוסחת הנסיגה יכולה להיות תלויה בכל הערכים הקודמים, וגם ב-n. למשל, קיימת פונקציה יחידה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ כך ש-π-$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} kf(k) + \pi$.

על מנת לנסח אותה, נגדיר מספר מושגים. בהנתן קבוצה A, *סדרה סופית* של איברי A היא פונקציה $\alpha : \mathbb{N}^{<k} \to A$ (עבור $k \in \mathbb{N}$ כלשהו). k נקרא *האורך של הסדרה*, ומסומן ב-$|\alpha|$. נסמן ב-A^* את קבוצת כל הסדרות הסופיות של איברי A. סדרה סופית האורך של הסדרה

מסקנה 3.2.13. *נניח ש-A קבוצה, ו-$t : A^* \to A$ פונקציה. אז קיימת פונקציה יחידה $f : \mathbb{N} \to A$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n) = t(f\restriction_{\mathbb{N}^{<n}})$.*

תרגיל 3.2.14. הוכיחו את מסקנה 3.2.13 והסבירו איך כל הדוגמאות הקודמות מתקבלות ממנה

3.3 הוכחת משפט ההגדרה ברקורסיה

לצורך הוכחת המשפט, נקבע שוב מודל $\langle M, \preceq \rangle$ של הטבעיים. נקבע פונקציה $t : A \to A$ ואיבר $a \in A$ כמו במשפט. על מנת להוכיח את המשפט, נתבונן בפתרונות לבעיה יותר כללית: נאמר שפונקציה $f : D \to A$ היא *פתרון חלקי* של הבעיה אם D רישא לא ריקה של M, והדרישות במשפט מתקיימות עבור איברי D, כלומר: $f(0) = a$, ולכל $n \in D$, אם $s(n) \in D$ אז $f(s(n)) = t(f(n))$ (כיוון ש-D רישא, אם $s(n) \in D$ אז גם $n \in D$). נשים לב ראשית:

תרגיל 3.3.1. נניח ש-$f : D \to M$ פתרון חלקי, ו-$D_1 \subseteq D$ רישא. אז $f\restriction_{D_1}$ גם פתרון חלקי.

נוכיח כעת גרסא חזקה יותר של היחידות: כיוון ש-M עצמו הוא רישא, היחידות נובעת מהטענה הבאה.

טענה 3.3.2. *אם $f : D \to M$ ו-$g : D \to M$ שני פתרונות חלקיים עם אותו תחום, אז $f = g$.*

הוכחה. נוכיח, באינדוקציה על m, שאם $m \in D$ אז $f(m) = g(m)$. עבור $m = 0$ מתקיים לפי ההנחה $f(0) = a = g(0)$. נניח שהטענה נכונה עבור m, ונניח ש-$s(m) \in D$ (אחרת הטענה נכונה באופן ריק). אז לפי ההגדרה של פתרון חלקי, בשילוב עם הנחת האינדוקציה, $f(s(m)) = t(f(m)) = t(g(m)) = g(s(m))$. $\square$

פתרונות חלקיים יותר קל לייצר מפתרון מלא. למשל, הפונקציה $\{\langle 0, a \rangle\}$ היא פתרון חלקי על התחום $\{0\}$. באופן יותר כללי:

טענה 3.3.3. *לכל $m \in M$, קיים פתרון חלקי $f_m : M^{\preceq m} \to A$*

הוכחה. באינדוקציה על m. עבור $m = 0$ הפונקציה $f_0 = \{\langle 0, a \rangle\}$ היא פתרון חלקי. נניח שקיים פתרון חלקי f_m, ונגדיר $f_{s(m)} = f_m \cup \{\langle s(m), t(f_m(m)) \rangle\}$. אז $f_{s(m)}$ פונקציה שתחומה הוא $M^{\preceq s(m)}$ ועלינו להוכיח שזהו פתרון חלקי. כיוון ש-$0 \in M^{\preceq m}$, מתקיים $f_{s(m)}(0) = f_m(0) = a$. באופן דומה, אם $n < m$ אז $s(n) \in M^{\preceq m}$ ולכן $f_{s(m)}(s(n)) = f_m(s(n)) = t(f_m(n))$ לפי הנחת האינדוקציה. מאידך, אם $n = m$ אז התנאי מתקיים ישירות מבניית $f_{s(m)}$. $\square$

לסיכום, יש לנו פתרונות חלקיים ש"הולכים ומתקרבים" לפתרון שאנחנו מחפשים, ואנחנו מעוניינים "להדביק" אותם לפתרון שלם. הטענה הבאה נותנת קריטריון כללי שמאפשר את ההדבקה.

טענה 3.3.4. *נניח ש-$\mathcal{C}$ קבוצה של פונקציות, ולכל $f \in \mathcal{C}$ נסמן ב-D_f את התחום של f. אז התנאים הבאים שקולים:*

(א) קיימת פונקציה h שתחומה $\bigcup\{D_f \mid f \in \mathcal{C}\}$, ומקיימת $h\restriction_{D_f} = f$ לכל $f \in \mathcal{C}$.

(ב) לכל $f, g \in \mathcal{C}$ מתקיים $f\restriction_{D_f \cap D_g} = g\restriction_{D_f \cap D_g}$.

אם התנאים מתקיימים, אז h כזו היא יחידה.

תרגיל 3.3.5. הוכיחו את טענה 3.3.4

כעת אפשר לסיים את הוכחת משפט ההגדרה ברקורסיה:

הוכחת משפט 3.2.1. היחידות היא מקרה פרטי של טענה 3.3.2. על מנת להוכיח קיום, נתבונן בקבוצה $\mathcal{C}$ של פתרונות חלקיים לבעיה. אם $f, g \in \mathcal{C}$, אז התחומים D_f ו-D_g שלהן הם רישות של M. לפי תרגיל 2.4.29, הקבוצה $D = D_f \cap D_g$ אף היא רישא, ולכן לפי תרגיל 3.3.1, $f\restriction_D$ ו-$g\restriction_D$ פתרונות חלקיים. לכן, לפי טענה 3.3.2, $f\restriction_D = g\restriction_D$.

הוכחנו שכל שני איברים של $\mathcal{C}$ מסכימים על התחום המשותף. לכן, לפי טענה 3.3.4, קיימת פונקציה $h : D \to A$, כאשר $D = \bigcup\{D_f \mid f \in \mathcal{C}\}$, שהצמצום שלה לתחום D_f הוא f, לכל $f \in \mathcal{C}$. לפי טענה 3.3.3, $\mathcal{C}$ כוללת פונקציות שתחומן הוא $M^{\preceq m}$, לכל $m \in M$. לכן, $D = M$.

נותר להוכיח ש-$h(0) = a$ וש-$h(s(m)) = t(h(m))$ לכל $m \in M$. בהינתן $m \in M$, מתקיים

$$h(s(m)) = f_{s(m)}(s(m)) = t(f_{s(m)}(m)) = t(h(m))$$

משום ש-$m, s(m) \in M^{\preceq s(m)}$. באופן דומה, $h(0) = f_0(0) = a$. $\square$

סוף הרצאה 7, 27 במאי 2024

3.4 פעולות החשבון

ראינו שכל שני מודלים של הטבעיים הם איזומורפיים באופן יחיד כקבוצות סדורות, אבל על הטבעיים מוגדרות גם פעולות: חיבור, כפל, חזקה וכו'. האם יתכן שבשני מודלים של הטבעיים הפעולות הללו יהיו מוגדרות באופן שונה (מהותית)? ליתר דיוק, נניח ש-M_1 ו-M_2 שני מודלים של הטבעיים, כאשר על כל אחד ישנה פעולת חיבור $+_1$ ו-$+_2$. הוכחנו שקיים איזומורפיזם יחיד $f : M_1 \to M_2$ של קבוצות סדורות. האם בהכרח, לכל $m, n \in M_1$ מתקיים $f(m +_1 n) = f(m) +_2 f(n)$?

בסעיף זה נראה שהתשובה היא כן: כל פעולות החשבון נקבעות על-ידי הסדר. למעשה, נשתמש במשפט ההגדרה ברקורסיה. ראשית, נשים לב שאנחנו יודעים להגדיר את הפונקציה a_n של "הוספת n".

הגדרה 3.4.1. נניח ש-$n \in \mathbb{N}$. נגדיר את הפונקציה $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ברקורסיה על-ידי התנאים $a_n(0) = n$ ו-$a_n(s(m)) = s(a_n(m))$ לכל $m \in \mathbb{N}$.

למשל, a_0 היא הזהות, ו-s $a_1 = a_{s(0)} = s$.

תרגיל 3.4.2. הוכיחו שלכל $n, m \in \mathbb{N}$:

(א) $a_{s(n)} = s \circ a_n = a_n \circ s$

(ב) $a_n(m) = a_m(n)$

(ג) $a_n \circ a_m = a_m \circ a_n$

אנחנו רוצים להגדיר $n + m = a_n(m)$. ישנו קושי טכני: לא ברור שישנה פונקציה שמתאימה ל-n את a_n. זו בעיה שלא קשה לפתור:

טענה 3.4.3. *קיימת פונקציה $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך ש-$a(n) = a_n$.*

הוכחה. נשתמש במשפט ההגדרה ברקורסיה עבור הנתונים $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, התנאי ההתחלתי $a_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ ו-$t : A \to A$ נתונה על-ידי $t(f) = s \circ f$. אז המשפט מספק פונקציה (יחידה) $a : \mathbb{N} \to A$ כך ש-$a(0) = a_0$ ו-$a(s(n)) = s \circ a(n)$. אז הטענה נובעת מאינדוקציה ותרגיל 3.4.2. □

הגדרה 3.4.4. *החיבור על הטבעיים* מוגדר על-ידי $m + n = a(m)(n)$, עבור כל $m, n \in \mathbb{N}$, כאשר a הפונקציה מטענה 3.4.3 החיבור על הטבעיים

מתרגיל 3.4.2 נובע שהחיבור הוא, כצפוי, חילופי: $m + n = n + m$. תכונות נוספות של החיבור ניתן לבדוק בדרך דומה.

ההגדרה של כפל, חזקה וכו', נעשות באופן דומה:

הגדרה 3.4.5. נגדיר פונקציה $m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ברקורסיה על-ידי: $m(0) = 0$ (הפונקציה הקבועה 0), ו-$m(s(k)) = m(k) + \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ לכל $k \in \mathbb{N}$. *הכפל על הטבעיים* מוגדר על-ידי $n \cdot k = m(n)(k)$ לכל n, k. הכפל על הטבעיים

באופן דומה, הפונקציה $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ מוגדרת ברקורסיה על-ידי $p(0) = 1$ (הפונקציה הקבועה 1), ו-$p(s(k)) = p(k) \cdot \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. *פעולת החזקה על הטבעיים* מוגדרת על-ידי $n^k = p(k)(n)$. פעולת החזקה על הטבעיים

תרגיל 3.4.6. הוכיחו שהכפל חילופי: $n \cdot m = m \cdot n$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

3.5 תתי-קבוצות של הטבעיים

הגדרה 3.5.1. לקבוצה X *יש גודל* $n \in \mathbb{N}$ אם יש פונקציה הפיכה $f : X \to \mathbb{N}^{<n}$. קבוצה X היא *סופית* אם יש $n \in \mathbb{N}$ כך של-X יש גודל n. סופית

נשים לב שאם יש פונקציה הפיכה $f : X \to Y$ אז ל-X יש גודל n אם ורק אם ל-Y יש גודל n.

טענה 3.5.2 (עקרון שובך יונים). *אם ל-X יש גודל n ול-Y יש גודל m כאשר $n > m$, אז אין פונקציה חח"ע מ-X ל-Y.*

אם A קבוצה כלשהי, ו-$a,b\in A$, נסמן ב-$t_{a,b}=\mathrm{Id}_A\setminus\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}\cup\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$ זוהי פונקציה הפיכה, הפונקציה היחידה שמחליפה בין a ל-b ומשאירה את יתר האיברים במקומם.

הוכחה. מספיק להוכיח שעבור $n>m$, אין פונקציה חח"ע מ-$\mathbb{N}^{<n}$ ל-$\mathbb{N}^{<m}$, באינדוקציה על n. עבור $n=0$ הטענה נכונה באופן ריק. נניח ש-$f:\mathbb{N}^{<s(n)}\to\mathbb{N}^m$ חח"ע. בפרט, $m>0$, אז יש לו קודם מיידי $m-1$. אז $g=t_{f(n),m-1}\circ f$ גם היא פונקציה כזו, ו-$g(n)=m-1$. כיוון ש-g חח"ע, התמונה של $h=g\restriction_{\mathbb{N}^{<n}}$ מוכלת ב-$\mathbb{N}^{m-1}$, ו-h חח"ע, בסתירה להנחת האינדוקציה. $\square$

מסקנה 3.5.3. *אם ל-X יש גודל n וגם גודל m אז* $n=m$.

אם ל-X יש גודל n, נסמן $|X|=n$, ונאמר ש-n הוא *הגודל של* X. הגודל של X

מסקנה 3.5.4. *הקבוצה* $\mathbb{N}$ *אינה סופית*

תרגיל 3.5.5. הוכיחו את המסקנות

טענה 3.5.6. *נניח ש-*$X\subseteq\mathbb{N}$.

(א) *אם X לא ריקה וחסומה אז יש לה מקסימום.*

(ב) *אם X אינה חסומה, אז היא איזומורפית (עם הסדר המושרה) ל-*$\mathbb{N}$.

(ג) *X סופית אם ורק אם היא חסומה (מלעיל).*

הוכחה. (א) לפי ההנחה, הקבוצה $A=\{n\mid X\subseteq\mathbb{N}^{\le n}\}$ של כל החסמים של X היא לא ריקה, ולכן יש לה מינימום a. אם $a\notin X$, אז כל איברי X קטנים ממש מ-a. כיוון ש-X לא ריקה, בפרט $a>0$, ולכן קיים ל-a קודם מיידי b, ו-A חסומה על-ידי b, בסתירה למינימליות של a. לכן $a\in X$ והוא המקסימום.

(ב) נוכיח ש-X עם הסדר המושרה היא מודל של הטבעיים. לפי ההנחה, אין ב-X מקסימום. אם $A\subseteq X$ לא ריקה, אז A גם תת-קבוצה של $\mathbb{N}$, ולכן יש לה מינימום (שהוא גם המינימום בסדר המושרה על X). נניח $x\in X$ אינו המינימום ב-X. אז הקבוצה $Y=\{y\in X\mid y<x\}$ לא ריקה וחסומה (על-ידי x) ולכן לפי הסעיף הקודם יש לה מקסימום. זהו לפי ההגדרה הקודם המיידי של x.

(ג) נניח ש-X חסומה. אפשר להניח שהיא לא ריקה, אז יש לה מקסימום m (לפי הסעיף הראשון). נגדיר $Y=X\cup\{n\in\mathbb{N}\mid n>m\}$. אז Y לא חסומה, ולכן לפי הסעיף הקודם, יש איזומורפיזם $g:Y\to\mathbb{N}$. נסמן ב-f את הצמצום של g ל-X. אז f פונקציה חד-חד-ערכית ועל $\mathbb{N}^{\le g(m)}$: היא חח"ע כי היא צמצום של פונקציה חח"ע, אם $i\in X$ אז $i\le m$ ולכן $f(i)\le f(m)=g(m)$, כלומר התמונה של f אכן מוכלת ב-$\mathbb{N}^{\le g(m)}$. היא על משום שאם k לא בתמונה, אז הוא גם לא בתמונה של g, כי g עולה, בסתירה לבחירת g.

הכיוון השני נובע מהסעיף הקודם ומסקנה 3.5.4.

$\square$

מסקנה 3.5.7. *אם X קבוצה סופית ו-$Y \subseteq X$, אז Y סופית ו-$|Y| \leq |X|$. אם $|X| = |Y|$, אז $Y = X$.*

המסקנה מאפשרת להוכיח טענות באינדוקציה על גודל הקבוצה. למשל, עבור קבוצות סדורות מקבלים את התוצאות הבאות:

תרגיל 3.5.8. נניח ש-$\langle X, \preceq \rangle$ קבוצה סדורה סופית.

(א) הוכיחו שב-X יש איברי מזערי.

(ב) הוכיחו שאם $a \in X$ מזערי *יחיד*, אז הוא מינימום.

(ג) הראו ששני הסעיפים הקודמים לא בהכרח נכונים אם X אינה סופית.

(ד) הוכיחו שניתן להרחיב את $\preceq$ לסדר קווי על X.

(ה) הוכיחו שאם הסדר $\preceq$ הוא קווי אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-X איזומורפית ל-$\mathbb{N}^{<n}$.

הקשר בין פעולות על קבוצות סופיות לפעולות החשבון נתון על-ידי הטענה הבאה. סוף הרצאה 8, 29 במאי 2024

טענה 3.5.9. *נניח ש-A, B קבוצות סופיות.*

(א) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. *בפרט, אם* A, B *זרות אז* $|A \cup B| = |A| + |B|$.

(ב) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

(ג) $|A^B| = |A|^{|B|}$

(ד) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

בפרט, כל הקבוצות המוזכרות הן סופיות.

תרגיל 3.5.10. הוכיחו את טענה 3.5.9.

הגדרה 3.5.11. קבוצה X נקראת *קבוצה בת-מנייה* אם קיימת פונקציה חח"ע $f : X \to \mathbb{N}$. קבוצה בת-מנייה

לסיכום הסעיף, נראה שאנחנו יכולים למיין עכשיו מחלקה נוספת של קבוצות סדורות:

משפט 3.5.12. *נניח ש-$\langle X, \preceq \rangle$ קבוצה סדורה המקיימת את התנאים הבאים:*

(א) הסדר קווי, צפוף, ללא נקודות קצה (כלומר, בלי מינימום ובלי מקסימום)

(ב) X היא בת-מנייה

נניח ש-$\langle Y, \trianglelefteq \rangle$ קבוצה סדורה נוספת המקיימת אותם תנאים. אז יש איזומורפיזם (של קבוצות סדורות) מ-X ל-Y.

בשביל ההוכחה, נזדקק לאבחנה הבאה:

תרגיל 3.5.13. נניח ש-$\langle X, \preceq\rangle$ קבוצה סדורה קווית, צפופה, ללא נקודות קצה. הוכיחו:

(א) X אינסופית

(ב) נניח ש-$A, B \subseteq X$ תתי-קבוצות סופיות כך ש-$a \prec b$ לכל $a \in A$ ו-$b \in B$. אז קיים $x \in X$ כך ש-$a \prec x$ לכל $a \in A$ ו-$b \prec x$ לכל $b \in B$.

הוכחה. לפי ההנחה, קיימת פונקציה חח"ע מ-X ל-$\mathbb{N}$. לפי תרגיל 3.5.13, X ולכן התמונה שלה אינסופיות, ולפי טענה 3.5.6, התמונה איזומורפית ל-$\mathbb{N}$. לכן ניתן להניח מראש שיש לנו פונקציה הפיכה (של קבוצות) $f : \mathbb{N} \to X$. באותו אופן, יש פונקציה הפיכה $g : \mathbb{N} \to Y$.

נגדיר סדרה של איזומורפיזמים $t_i : X_i \to Y_i$ עבור $i \in \mathbb{N}$, המקיימות לכל i:

(א) t_{i+1} מרחיבה את t_i.

(ב) $X_i \subseteq X$ ו-$Y_i \subseteq Y$ (עם הסדר המושרה), וכל אחת מהן סופית.

(ג) $f(i) \in X_i$ ו-$g(i) \in Y_i$

אם נצליח, טענה 3.3.4 תיתן לנו את האיזומורפיזם שאנחנו מחפשים: לפי הנקודה הראשונה, הפונקציות מקיימות את תנאי הטענה, התחום של הפונקציה h שמתקבלת הוא $X = \bigcup\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ לפי הנקודה האחרונה, הפונקציה היא על Y שוב לפי הנקודה האחרונה, ו-h עולה כי כל t_i עולה.

נגדיר $t_0 = \{\langle f(0), g(0)\rangle\}$. נניח שהגדרנו כבר את t_i, נגדיר הרחבה שלה s. נסמן $x = f(i+1)$. אם $x \in X_i$, נגדיר $s = t_i$. אחרת, נסמן $U = \{u \in X_i \mid u \prec x\}$ ו-$V = \{v \in X_i \mid x \prec v\}$. אז לכל $u \in U$ ו-$v \in V$ מתקיים $u \prec v$, ולכן, כיוון ש-t_i עולה, מתקיים $a \lhd b$ לכל $a \in A = t_i[U]$ ו-$b \in B = t_i[V]$. לפי תרגיל 3.5.13, יש $y \in Y$ כך ש-$a \lhd y \lhd b$ לכל $a \in A$ ו-$b \in B$. נגדיר $s = t_i \cup \{\langle x, y\rangle\}$. אז בשני המקרים s מקיימת את כל הדרישות עבור t_{i+1} מלבד (אולי) ש-$g(i+1) \in Y_{i+1}$. על מנת לספק גם את הדרישה האחרונה, נחזור על התהליך בכיוון ההפוך, עם s במקום t_i (ו-$y' = g(i+1)$ במקום x). אז הפונקציה t_{i+1} שמתקבלת ככה מקיימת את כל הדרישות. $\square$

הערה 3.5.14. ההוכחה כוללת אי-דיוק: קיומה של סדרה t_i כמו בהוכחה לא מובטח על-ידי משפט ההגדרה ברקורסיה, משום שלא סיפקנו דרך מדויקת לבחור את y (אלא רק השתמשנו בעובדה ש-y כזה קיים). ניתן לפתור את הבעיה על-ידי כך שבוחרים את ה-y מהצורה $g(j)$ כאשר j מינימלי (מבין קבוצת ה-k עבורם $g(k)$ מקיים את התנאי). נחזור לזה בהמשך.

על-מנת להפוך את המשפט ליותר מעניין, מעניין להכיר דוגמא של קבוצה סדורה שמקיימת את התנאים במשפט. בפרט, מעניין לדעת האם יש פונקציה חח"ע מ-$\mathbb{Q}$ ל-$\mathbb{N}$. זה הנושא של הסעיף הבא.

סוף הרצאה 9, 30 במאי 2024

4 עוצמות

4.1 שוויון עוצמות

הגדרה 4.1.1. קבוצה X היא *שוות עצמה* לקבוצה Y אם קיימת פונקציה הפיכה מ-X ל-Y. סימון: $X \sim Y$. שוות עצמה

תרגיל 4.1.2. שוויון עוצמות הוא יחס שקילות על אוסף כל הקבוצות.

דוגמה 4.1.3. אם X סופית, אז $X \sim Y$ אם ורק אם Y סופית ו-$|X| = |Y|$. $\diamondsuit$

דוגמה 4.1.4 (המלון של הילברט א). $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_+$ $\diamondsuit$

בפרט, האנלוגים של (גרסאות מסוימות של) הטענות לגבי קבוצות סופיות הם שגויים.

תרגיל 4.1.5. נניח ש-X_1, Y_1, X_2, Y_2 קבוצות כך ש-$X_1 \sim X_2$ ו-$Y_1 \sim Y_2$. אז:

(א) $X_1 \times Y_1 \sim X_2 \times Y_2$

(ב) ${X_1}^{Y_1} \sim {X_2}^{Y_2}$

(ג) $X_1 \cup Y_1 \sim X_2 \cup Y_2$ אם X_1, Y_1 זרות וגם X_2, Y_2 זרות.

(ד) $\mathcal{P}(X_1) \sim \mathcal{P}(X_2)$

דוגמה 4.1.6 (המלון של הילברט ב). $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$, $\mathbb{P} \sim \mathbb{N}$ $\diamondsuit$

דוגמה 4.1.7 (המלון של הילברט ג). $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$: נגדיר יחס $\preceq$ על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ על-ידי $\langle a, b\rangle \preceq \langle c, d\rangle$ אם $a+b < c+d$ או $a+b = c+d$ ו-$a \le c$. אז $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preceq\rangle$ מודל של הטבעיים (תרגיל) ולכן איזומורפי (אפילו כקבוצה סדורה) ל-$\mathbb{N}$. $\diamondsuit$

הטענה הבאה נותנת כמה שקילויות כלליות:

טענה 4.1.8. *נניח ש-A, B, C קבוצות כלשהן.*

(א) $\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A$

(ב) $(A \times B)^C \sim A^C \sim B^C$

(ג) $A^{B\times C} \sim (A^B)^C$

(ד) $A^{B\cup C} \sim \{\langle f, g\rangle \in A^B \times A^C \mid f\restriction_{B\cap C} = g\restriction_{B\cap C}\}$. *בפרט, אם* B, C *זרות אז* $A^{B\cup C} \sim A^B \times A^C$.

הוכחה. נוכיח את (ד): נגדיר $S : (A^B)^C \to A^{B\times C}$ על-ידי: $S(f)(\langle b, c\rangle) = f(c)(b)$ לכל $f \in (A^B)^C$ ו-$c \in C, b \in B$. נגדיר $T : A^{B\times C} \to (A^B)^C$ על-ידי $T(g)(c)(b) = g(\langle b, c\rangle)$ לכל $g \in A^{B\times C}$ ו-$c \in C, b \in B$. בדיקה ישירה מראה ש-S, T הפכיות אחת לשניה. $\square$

תרגיל 4.1.9. השלימו את ההוכחה. בידקו מה משמעות הטענות כאשר A, B, C קבוצות סופיות.

דוגמה 4.1.10. האם $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^*$? $\diamondsuit$

דוגמה 4.1.11. האם $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$? $\diamondsuit$

העצמה של X קטנה או שווה לעצמה של Y

הגדרה 4.1.12. נניח ש-X ו-Y קבוצות. *העצמה של X קטנה או שווה לעצמה של Y* אם קיימת פונקציה חח"ע $f : X \to Y$. סימון: $X \precsim Y$

תרגיל 4.1.13. הוכיחו ש-$\precsim$ קדם סדר (רפלקסיבי וטרנזיטיבי) על אוסף הקבוצות

תרגיל 4.1.14. אם $X \precsim Y$ ו-$X \sim X'$ ו-$Y \sim Y'$ אז $X' \precsim Y'$.

דוגמה 4.1.15. נניח ש-Y סופית. אז $X \precsim Y$ אם ורק אם X סופית ו-$|X| \leq |Y|$ $\diamondsuit$

משפט 4.1.16 (משפט קנטור–שרודר–ברנשטיין). *לכל שתי קבוצות X, Y, אם $X \precsim Y$ ו-$Y \precsim X$ אז $X \sim Y$.*

הוכחה. לפי הנתון, קיימות פונקציות חח"ע $f : X \to Y$ ו-$g : Y \to X$. לכל תת-קבוצה $U \subseteq X$ נסמן $g_U = g \restriction_{Y \setminus f[U]}$, ונתבונן בקבוצה $h_U = f \restriction_U \cup {g_U}^{-1}$. אנחנו טוענים ש-$h_U$ היא פונקציה הפיכה מ-X ל-Y אם $X \setminus U = \operatorname{Im}(g_U)$: ראשית, במקרה זה $\operatorname{Im}(g_U)$ זרה ל-U, אז התחום של ${g_U}^{-1}$ זר ל-U ולכן h_U פונקציה. התחום של h_U הוא $\operatorname{Im}(g_U) \cup U = X$, ו-$h_U$ חח"ע משום ש-$f[U]$ ו-$dom(g_U)$ זרים. לבסוף, התמונה של h_U היא $f[U] \cup \operatorname{Dom}(g_U) = Y$, אז h_U על.
לכן, על מנת להוכיח את המשפט מספיק להוכיח שקיימת $U \subseteq X$ כך ש-$X \setminus U = \operatorname{Im}(g_U)$.
נתבונן בפונקציה $t : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ המוגדרת על-ידי: $t(U) = X \setminus g[Y \setminus f[U]]$. אז אנחנו מחפשים קבוצה $U \subseteq X$ כך ש-$U = t(U)$. נשים לב שכפונקציה מהקבוצה הסדורה $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ לעצמה, t היא פונקציה שומרת סדר: אם $U \subseteq V$, אז $f[U] \subseteq f[V]$, ולכן $Y \setminus f[U] \supseteq Y \setminus f[V]$ אז $g[Y \setminus f[U]] \supseteq g[Y \setminus f[V]]$, כלומר $t(U) \subseteq t(V)$. כיוון שב-$\mathcal{P}(X)$ קיים חסם עליון לכל תת-קבוצה, הטענה נובעת מטענה 2.4.38. $\square$

מסקנה 4.1.17. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$. *בפרט, כל קבוצה סדורה קווית צפופה בת-מניה ללא נקודות קצה איזומורפית ל-$\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$.*

הוכחה. הפונקציה ששולחת את $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ בהצגה מצומצמת לזוג $\langle a, b \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ היא חח"ע, ולכן $\mathbb{Q} \precsim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. מאידך, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ אז $\mathbb{N} \precsim \mathbb{Q}$, ולכן לפי המשפט $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$. החלק השני נובע מזה וממשפט 3.5.12. $\square$

מסקנה 4.1.18. $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^*$

הוכחה. ברור ש-$\mathbb{N} \precsim \mathbb{N}^*$. מאידך, הפונקציה $c : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ הנתונה על-ידי $c(a_1, \dots, a_n) = p_1^{a_1+1} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n+1}$ (כאשר p_i הראשוני ה-i) היא פונקציה חח"ע ולכן $\mathbb{N}^* \precsim \mathbb{N}$. לפי המשפט, השקילות נובעת מכך. $\square$

סוף הרצאה 10, 3 ביוני 2024

האם קיימת קבוצה שאינה סופית ואינה שוות עוצמה ל-$\mathbb{N}$?

משפט 4.1.19 (משפט קנטור). *כל קבוצה X אינה שוות עוצמה ל-$\mathcal{P}(X)$*

לכל קבוצה X, הפונקציה מ-X ל-$\mathcal{P}(X)$ ששולחת כל איבר ליחידון שלו היא חח"ע, ולכן $X \precsim \mathcal{P}(X)$, והמשפט בעצם אומר ש-$X \not\succsim \mathcal{P}(X)$.

הוכחה. נניח בשלילה ש-$f : \mathcal{P}(X) \to X$ חח"ע. נגדיר $R = \{A \subseteq X \mid f(A) \notin A\}$ ו-$\bar{R} = \{f(A) \mid A \in R\}$. ישנן שתי אפשרויות:

- $f(\bar{R}) \notin \bar{R}$. אז $\bar{R} \in R$ (לפי הגדרת R), ולכן $f(\bar{R}) \in \bar{R}$, בסתירה להנחה.
- $f(\bar{R}) \in \bar{R}$. אז יש $A \in R$ כך ש-$f(\bar{R}) = f(A)$ (לפי הגדרת $\bar{R}$). כיוון ש-f חח"ע, $A = \bar{R}$, ולכן $\bar{R} \in R$. זה סותר את ההגדרה של R.

בכל מקרה, קיבלנו סתירה. $\square$

המסקנה היא שקיימות הרבה קבוצות אינסופיות שאינן שקולות, למשל $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ וכן הלאה.

בצירוף עם משפט קנטור–ברנשטיין, טענה 4.1.8 ותרגילים 4.1.5, 4.1.14, אפשר לענות על מגוון שאלות על עוצמות. למשל:

דוגמה 4.1.20. מה אפשר להגיד על עצמת הסדרות $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ של תתי-קבוצות של $\mathbb{N}$? כמובן ש-$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \precsim \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$, ונראה שצד ימין יותר גדול. לפי התוצאות האחרונות,

$$\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \sim (\mathbf{2}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

כאשר סימנו $\mathbf{2} = \{0,1\}$, שתי השקילויות הראשונות הן לפי טענה 4.1.8, השלישית היא לפי דוגמה 4.1.7, והאחרונה שוב לפי 4.1.8 (וכולן משתמשות גם בתרגיל 4.1.5). $\diamondsuit$

דוגמה 4.1.21. תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ נקראת *ניתנת לחישוב* אם קיימת תכנית ג'אווהסקריפט שמקבלת כקלט מספר טבעי n, ומדפיסה 1 אם $n \in A$ ו-0 אחרת.[1] לדוגמה, קבוצת המספרים הראשוניים ניתנת לחישוב, משום שיש תהליך (שניתן ליישם כתכנית ג'אווהסקריפט) שמכריע אם מספר הוא ראשוני.

שאלה: האם קיימת תת-קבוצה של הטבעיים שאינה ניתנת לחישוב? אנחנו נראה שהתשובה היא כן. נסמן ב-C את קבוצת תתי-הקבוצות של $\mathbb{N}$ שניתנות לחישוב, ב-J את קבוצת התכניות. אז $C \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ואנחנו מנסים להבין אם יש שוויון.

לגבי J אנחנו יודעים שכל תכנית ג'אווהסקריפט היא רצף סופי של סימנים מתוך קבוצה סופית A של סימנים אפשריים (למשל, A יכולה להיות קבוצת התווים בסטנדרט היוניקוד). לכן, $J \subseteq A^*$, קבוצת כל הסדרות הסופיות של איברים ב-A. כיוון ש-A סופית, אפשר לזהות אותה עם תת-קבוצה של $\mathbb{N}$, ולכן $J \subseteq \mathbb{N}^*$. אבל ראינו במסקנה 4.1.18 ש-$\mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}$, ולכן גם $J \sim \mathbb{N}$. נקבע פונקציה הפיכה $t : J \to \mathbb{N}$.

לפי הגדרת C, לכל איבר $X \in C$ קיימת לפחות תכנית אחת $p \in J$ שמחשבת את X. נגדיר $t(X) \in J$ להיות תכנית כזו עבורה $t(p)$ מינימלי. קיבלנו פונקציה $t : C \to J$ שהיא חח"ע (משום

[1] ההגדרה הזו אינה מדוייקת משום שלא הגדרנו מה זה תכנית ג'אווהסקריפט, מהו קלט שלה וכו'. אפשר להגדיר את כל הדברים הללו בצורה מדויקת, וההגדרה שקולה להגדרה שלנו. במקום JS אפשר לקחת כל שפת תכנות אחרת.

שלא יתכן שאותה תכנית מחשבת שתי קבוצות שונות). לכן גם C בת-מנייה. בפרט, לפי משפט קנטור, היא שונה מ-$\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

נציין שהוכחנו שקיימות קבוצות לא ניתנות לחישוב, ובתרגיל הבא נראה שיש הרבה כאלה, אבל לתת דוגמה לקבוצה ספציפית כזו יותר קשה (אם כי עדיין אפשרי). $\diamondsuit$

תרגיל 4.1.22. הוכיחו שאיחוד של שתי קבוצות בנות מנייה הוא קבוצה בת-מנייה. הסיקו שאם A תת-קבוצה בת-מנייה של $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ אז $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus A$ אינה בת-מנייה.

ראינו שהקבוצות $\mathbb{Z}$ ו-$\mathbb{Q}$ הן בנות-מנייה. האם קיימת קבוצה של מספרים שאינה בת-מנייה? המטרה הבאה שלנו היא לחשב את העצמה של $\mathbb{R}$, ולשם כך נזכיר קודם את ההגדרה.

4.2 המספרים הממשיים

בסעיף זה נזכיר את ההגדרה של הממשיים, ונבדוק מה אפשר לומר עליהם מנקודת המבט של שקילות עוצמות.

המוטיבציה להגדרת $\mathbb{R}$ היא גאומטרית. בהנתן קו ישר l ושתי נקודות עליו, אותן נסמן ב-**0** ו-**1**, ניתן להתאים לכל מספר טבעי n נקודה על l, הנקודה שמתקבלת מהנחת עותקים של הקטע בין **0** ל-**1** אחד בעקבות השני n פעמים: למספר $0 \in \mathbb{N}$ מתאימה הנקודה **0**, למספר 1 הנקודה **1**, למספר 2 נקודת הקצה של הקטע שמתקבל משני עותקים של הקטע אחד אחרי השני. אפשר להכליל את האבחנה הזו למספרים שליליים, וגם לשברים. למשל, $\frac{1}{3}$ מתאים לנקודת הקצה של הקטע שמתחיל ב-**0**, ושלושה עותקים שלו מכסים את הקטע הבסיסי שלנו. פעולות החשבון ב-$\mathbb{Q}$ ויחס הסדר ניתנים לפירוש גאומטרי: למשל, הסכום של שני מספרים מתאים לשרשור הקטעים המתאימים.

האם כל נקודה על l מתאימה לשבר כלשהו? התשובה היא לא: האורך d של היתר במשולש ישר זווית ששני הניצבים שלו הם עותקים של הקטע הבסיסי מקיים (לפי משפט פיתגורס) $d^2 = 1 + 1 = 2$, אבל לא קיים מספר רציונלי עם התכונה הזו.

אנחנו רוצים לבנות קבוצת מספרים R עם התכונה שאיברי R יתאימו בדיוק לנקודות על l. יתר-על-כן, אנחנו רוצים להגדיר פעולות $\oplus$ ו-$\odot$ על R שיתאימו לפעולות הגאומטריות המתאימות על הישר, ויחס סדר שמתאים לאורכים של קטעים. העובדה ש*כל* נקודה מיוצגת ניתנת לביטוי על-ידי הטענה שאין "חורים": אם יש אוסף של נקודות שמתנהג כאילו שהוא הולך ומתקרב לנקודה מסוימת, אז נקודה כזו אכן קיימת. במלים אחרות, לכל תת-קבוצה חסומה ולא ריקה צריך להיות חסם עליון (למשל, המספר החיובי d המקיים d^2 הוא החסם העליון של הקבוצה $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$).

הגדרה 4.2.1. שדה סדור $\langle F, \oplus, \odot, 0_F, 1_F, \preceq \rangle$ הוא *מודל של הממשיים* אם לכל תת-קבוצה חסומה ולא ריקה יש חסם עליון. מודל של הממשיים

לדוגמה, $\mathbb{Q}$ הוא שדה סדור שאינו מודל של הממשיים: לקבוצה החסומה $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$ אין חסם עליון ב-$\mathbb{Q}$.

לפי משפט ההגדרה ברקורסיה, לכל שדה F ישנה פונקציה יחידה $i : \mathbb{N} \to F$ המקיימת $i(0) = 0_F$ ו-$i(n+1) = i(n) \oplus 1_F$ לכל $n \in \mathbb{N}$. במלים אחרות, $i(n)$ היא התוצאה של חיבור 1_F לעצמו n פעמים (ב-F). הפונקציה הזו מקיימת $i(n+m) = i(n) \oplus i(m)$ ו-$i(n \cdot m) = i(n) \odot i(m)$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$. אומרים של-F יש *מציין אפס* אם הפונקציה הזו היא מציין אפס

חח"ע. אם זה המצב, אז מזהים את $\mathbb{N}$ עם התמונה של i, ואומרים ש-$\mathbb{N} \subseteq F$. במקרה זה, לפונקציה הזו יש הרחבה יחידה לשיכון של $\mathbb{Q}$ ב-F, ולכן אומרים באופן יותר כללי ש-$\mathbb{Q} \subseteq F$ (כמו עם הטבעיים, פעולות הכפל והחיבור נשמרות תחת ההכלה הזו).

תרגיל 4.2.2. לכל שדה סדור יש מציין 0, ו-$\mathbb{Q}$ מוכל בו כשדה סדור.

אחת המסקנות המרכזיות מתכונת החסם העליון היא תכונת הארכימדיות:

הגדרה 4.2.3. שדה סדור F הוא *ארכימדי* אם לכל $x \in F$ קיים $n \in \mathbb{N} \subseteq F$ כך ש-$x \leq n$. ארכימדי

טענה 4.2.4. *כל מודל של הממשיים הוא ארכימדי*

הוכחה. אחרת, $\mathbb{N}$ תת-קבוצה חסומה של השדה F, ולכן יש לה חסם עליון s. אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n \preceq s$, ולכן $n - 1 \preceq s - 1$. לכן, גם $s - 1$ חסם של $\mathbb{N}$, בסתירה לבחירת s. □

קיימים שדות סדורים שאינם ארכימדיים, אבל קשה לתת דוגמה.

טענה 4.2.5. *אם F שדה סדור ארכימדי ו-$x \in F$ מקיים $0 \prec x$ אז יש $n \in \mathbb{N}$ חיובי כך ש-$\frac{1}{n} \prec x$.*

תרגיל 4.2.6. הוכיחו את הטענה

סוף הרצאה 11, 5 ביוני 2024

נזכיר שתת-קבוצה A של קבוצה סדורה $\langle X, \preceq \rangle$ היא *תת-קבוצה צפופה* אם לכל $x, y \in X$, אם $x \prec y$ אז יש $a \in A$ כך ש-$x \preceq a \preceq y$. תת-קבוצה צפופה

מסקנה 4.2.7. *אם F שדה סדור ארכימדי, אז $\mathbb{Q}$ צפוף ב-F, בגרסה חזקה: אם $x < y \in F$ אז יש $q \in \mathbb{Q}$ כך ש-$x < r < y$.*

הוכחה. נניח ש-$x < y \in F$. עלינו להוכיח שקיים $r \in \mathbb{Q}$ כך ש-$x \leq r \leq y$. נוכיח ראשית שאם $y - x \geq 1$, אז קיים r כזה ב-$\mathbb{Z}$. אם ל-x, y סימנים שונים (או אחד מהם 0), אז $r = 0$ מקיים את הדרישה. אחרת, אפשר להניח ש-$x > 0$. לפי ארכימדיות, הקבוצה $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$ היא תת-קבוצה לא ריקה של $\mathbb{N}$, ולכן יש לה מינימום $r > 0$. אם $y < r$ אז $x \leq y - 1 < r - 1$, בסתירה למינימליות של r. לכן r מקיים את הדרישות.

למקרה הכללי, לפי טענה 4.2.5, קיים $n \in \mathbb{N}_+$ כך ש-$\frac{1}{n} < y - x$. אז $ny - nx > 1$, ולכן יש $r \in \mathbb{Z}$ כך ש-$nx \leq r \leq ny$, ולכן $\frac{r}{n} \in \mathbb{Q}$ נמצא בין x ל-y.

כדי להוכיח את הגרסה החזקה, נשים לב ש-F עצמה צפופה: אם $x < y$ אז $x < \frac{x+y}{2} < y$. לכן, קיים רציונלי q המקיים $x \leq q \leq \frac{x+y}{2} < y$, ובאופן דומה ל-$x$. □

משפט 4.2.8 (יחידות הממשיים). *בין כל שני מודלים $\langle K, \preceq \rangle, \langle L, \trianglelefteq \rangle$ של הממשיים, קיים איזומורפיזם יחיד של קבוצות סדורות מעל $\mathbb{Q}$, כלומר: איזומורפיזם $f : K \to L$ של קבוצות סדורות, כך ש-$f(r) = r$ לכל $r \in \mathbb{Q}$.*

הוכחה. נוכיח ראשית יחידות, בצורה יותר חזקה: נניח ש-$f, g : K \to L$ עולות, כך ש-$f(q) = g(q) = q$ לכל $q \in \mathbb{Q}$, ונוכיח ש-$f = g$ (כלומר, ללא הדרישה ש-f או g על). אכן, נניח בשלילה ש-$f(x) \lhd g(x)$ עבור $x \in K$ (בלי הגבלת הכלליות). לפי הצפיפות, קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש-$f(x) \lhd q \lhd g(x)$. לפי ההנחה, $f(q) = g(q) = q$, ולכן $g(q) \lhd g(x)$ אבל $f(x) \lhd f(q)$. אחד מהם מהווה סתירה לכך ש-f, g עולות.

כדי להוכיח קיום, לכל $x\in K$ נגדיר $p_x=\{r\in\mathbb{Q}\mid r\prec x\}\subseteq\mathbb{Q}$. נשים לב שזו קבוצה לא ריקה וחסומה ב-K. כיוון ש-K ארכימדי, היא חסומה גם כתת-קבוצה של $\mathbb{Q}$, ולכן גם כתת-קבוצה של L. כיוון ש-L מודל של הממשיים, יש ל-p_x חסם עליון ב-L. זה יהיה $f(x)$.

אם $x\prec y$ ב-K, אז לפי הצפיפות יש $q\in\mathbb{Q}$ כך ש-$x\le q<y$. אז q גדול מכל איברי p_x ולכן $f(x)\le q$, ו-$q\in p_y$ וב-p_y אין מקסימום (שוב לפי צפיפות), ולכן $q<f(y)$. בפרט, $f(x)<f(y)$.

נניח ש-$x\in\mathbb{Q}\subseteq K$, ונוכיח ש-$x$ החסם העליון של p_x גם ב-Y. ראשית, x חוסם את p_x גם ב-Y, אז $\sup_Y p_x\trianglelefteq x$. אם הם לא שווים, אז לפי הצפיפות קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש-$f(x)\lhd q\lhd x$. כיוון ש-$q,x\in\mathbb{Q}$, זה גורר ש-$q<x$, כלומר $q\in p_x$. אבל אז $q\in f[p_x]$, ולכן $q\trianglelefteq f(x)$, בסתירה לבחירתו. לכן, f היא הזהות על $\mathbb{Q}$.

מצאנו פונקציה עולה f מ-K ל-L שהיא הזהות על $\mathbb{Q}$. מאותה סיבה, יש פונקציה עולה $g:L\to K$ שהיא הזהות על $\mathbb{Q}$. ההרכבה $g\circ f:K\to K$ היא פונקציה עולה שהיא הזהות על K, ולכן לפי היחידות שהוכחנו, היא חייבת להיות הזהות. באותו אופן, $f\circ g$ היא הזהות על L. □

הערה 4.2.9. השתמשנו במבנה השדה כדי להוכיח ש-$\mathbb{Q}$ תת-קבוצה (סדורה) צפופה ולא חסומה של המודלים. בהוכחה האחרונה השתמשנו רק בתכונות אלו, מבנה השדה לא היה הכרחי.

מסקנה 4.2.10. *אם K,L שני מודלים של הממשיים, אז קיים איזומורפיזם יחיד של שדות סדורים ביניהם, כלומר, איזומורפיזם סדר יחיד $f:K\to L$ המקיים $f(x+y)=x+y$ ו-$f(xy)=f(x)f(y)$ לכל $x,y\in K$.*

הוכחה. ראשית, קל לבדוק שכל איזומורפיזם של שדות f מקיים $f(0)=0$ ו-$f(1)=1$, ולכן באינדוקציה $f(n)=n$ לכל $n\in\mathbb{N}$, ולכן הזהות על $\mathbb{Q}$. זה מוכיח את היחידות.

בשביל הקיום, עלינו להוכיח שאיזומורפיזם הסדר היחיד מהמשפט שומר גם על הפעולות. עבור החיבור, נשים לב ש-$p_{x+y}=p_x+p_y:=\{r+s\mid r\in p_x,s\in p_y\}$. לכן, מספיק לבדוק ש-$\sup(p_x+p_y)=\sup(p_x)+\sup(p_y)$, וזה תרגיל. ההוכחה עבור כפל דומה. □

תרגיל 4.2.11. השלימו את ההוכחה.

למען השלמות, נאמר גם משהו על הקיום. ישנן מספר דרכים, על-פניו שונות, לבנות מודל של הממשיים. למרות השוני בבניות, טענת היחידות מראה שמקבלים אותו שדה סדור. לכן, הבנייה הספציפית לא משנה, וגם לא נעשה בה שימוש בהמשך. הבנייה שנראה מגיעה ישירות מההוכחה לעיל. הרעיון הוא שאפשר לתאר במפורש את הקבוצות p_x בהוכחה.

משפט 4.2.12 (קיום הממשיים). *קיים מודל של הממשיים*

הוכחה. נגדיר את K כקבוצה להיות כל הרישות p של $\mathbb{Q}$ כך ש-p לא ריקה, חסומה מלמעלה, וללא מקסימום. ראינו בתרגיל 2.4.29 ש-K סדורה קווית על-ידי הכלה. השיכון של $\mathbb{Q}$ ב-K נתון על-ידי $x\mapsto p_x$.

על-מנת להוכיח ש-K מקיימת את תכונת החסם העליון, נתבונן בתת-קבוצה חסומה ולא ריקה $S\subseteq K$. אנו טוענים ש-$B=\bigcup S$ חסם עליון של S. ראשית, B לא ריקה כי S קבוצה לא ריקה של קבוצות לא ריקות. B היא רישא משום שאם $x\in B$ אז יש $p\in S$ כך ש-$x\in p$, ואם $y\le x$

אזגם $y \in p$ (כי p רישא) ולכן $y \in B$. לבסוף, כיוון ש-S חסומה, קיימת רישא חסומה מלעיל p שמכילה את כל הרישות ב-S, ולכן $B \subseteq p$. לכן גם B חסומה מלעיל.

לבסוף, נגדיר את פעולות החשבון: אם $p, q \in K$ שתי רישות, הסכום שלהן מוגדר על-ידי $p + q = \{x + y \mid x \in p, y \in q\}$ ואם $p, q > 0$ (כלומר, $0 \in p, q$), נגדיר $p \cdot q = \{z \in \mathbb{Q} \mid \exists x \in p, y \in q, x, y > 0 z \leq xy\}$. נשאיר כתרגיל לבדוק שהפעולות הללו מקיימות את אקסיומות השדה. $\square$

על-מנת לוודא את השוויונות בפעולות השדה (ושוויונות נוספים), נוח לשים לב שהמושגים של גבול ורציפות, והתוצאות סביבם תקפים לכל מודל של הממשיים (ללא צורך בפעולות החשבון). בפרט, יש לנו את התוצאה הבאה:

טענה 4.2.13. *אם K מודל של הממשיים (לא בהכרח עם פעולות חשבון), ו-$f, g : K \to K$ הן פונקציות רציפות, כך ש-$f(q) = g(q)$ לכל שבר $q \in \mathbb{Q}$, אז $f = g$.*

תרגיל 4.2.14. הוכיחו שפעולות החיבור והכפל, כפי שהוגדרו בהוכחת משפט 4.2.12, הן רציפות בכל קלט בנפרד: לכל $a \in K$, הפונקציה $x \mapsto a + x$ היא רציפה (ובאופן דומה לכפל). הסיקו שהפעולות הללו מקיימות את אקסיומות השדה.

הגדרה 4.2.15. *שדה הממשיים* $\mathbb{R}$ הוא המודל הממשי היחיד המובטח על-ידי משפטים 4.2.12 ו-4.2.10. שדה הממשיים

המוטיבציה שלנו לבניית הממשיים הגיעה מהמחסור של פתרונות למשוואה $x^2 - 2 = 0$ ברציונליים. בממשיים יש למשוואה זו פתרון: הפתרון החיובי הוא החסם העליון של הקבוצה $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$. המשוואה הנ"ל היא דוגמא ל*משוואה פולינומית* מעל $\mathbb{Q}$, כלומר משוואה מהצורה $p(x) = 0$, כאשר $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ פולינום מתוקן (שונה מ-0) עם מקדמים $a_i \in \mathbb{Q}$. *הדרגה של פולינום* כזה היא n, ומספר הפתרונות של המשוואה $p(x) = 0$ הוא לכל היותר n. כל פתרון של משוואה זו נקרא *שורש של הפולינום* p. מספר ממשי $a \in \mathbb{R}$ נקרא *מספר אלגברי ממשי* אם הוא שורש של פולינום עם מקדמים ב-$\mathbb{Q}$. משוואה פולינומית הדרגה של פולינום שורש של הפולינום מספר אלגברי ממשי

תרגיל 4.2.16. אם r מספר אלגברי, יש פולינום מתוקן יחיד p מדרגה מינימלית כך ש-r שורש של p. הפולינום p נקרא *הפולינום המינימלי* של r. הפולינום המינימלי

האם קיימים מספרים ממשיים שאינם אלגבריים? אנחנו נראה שכן, משיקולי ספירה:

טענה 4.2.17. *קבוצת הממשיים האלגבריים היא בת מנייה*

הוכחה. נוכיח ראשית שהקבוצה $\mathbb{Q}[x]$ של הפולינומים עם מקדמים ב-$\mathbb{Q}$ היא בת-מנייה. אכן, פולינום כזה נקבע באופן יחיד על-ידי סדרת המקדמים שלו, שהיא סדרה סופית של איברים ב-$\mathbb{Q}$. כלומר, קבוצה זו שקולה ל-$\mathbb{Q}^* \sim \mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}$.

נקבע פונקציה הפיכה $t : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{N}$. נסמן ב-$A$ את קבוצת הממשיים האלגבריים. לכל מספר אלגברי r נסמן ב-p_r את הפולינום המינימלי שלו (תרגיל 4.2.16). לכל פולינום $p(x)$ (שונה מ-0) יש מספר סופי של שורשים, ושורשים אלו מסודרים בסדר הקווי של $\mathbb{R}$, ולכן יש לנו פונקציה עולה יחידה n_p מהשורשים של p לקבוצה $\mathbb{N}^{<k}$ (כאשר k מספר השורשים). אז הפונקציה $s : A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ הנתונה על-ידי $s(r) = \langle t(p_r), n_{p_r}(r) \rangle$ היא חד-חד-ערכית. כיוון ש-$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, קיבלנו ש-$A$ בת-מנייה. $\square$

מאידך, מה ניתן לומר על קבוצת כל הממשיים?

משפט 4.2.18. $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$

הוכחה. נוכיח ראשית ש-$\mathbb{R} \precsim \mathcal{P}(\mathbb{N})$: ראינו בהוכחת היחידות שהפונקציה $x \mapsto p_x$ מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ היא חד-חד-ערכית. הואיל ו-$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, גם $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$, וסיימנו.

בכיוון השני, נוכיח ש-$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \precsim \mathbb{R}$. נגדיר יחס סדר $\trianglelefteq$ על $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ על-ידי: $c \trianglelefteq d$ אם $c = d$ או $c \neq d$ ו-$c(i) < d(i)$, כאשר $i = \min(\{j \in \mathbb{N} \mid c(j) \neq d(j)\})$ (במלים אחרות, זהו הסדר המילוני). זהו סדר קווי, עם מקסימום o, הפונקציה הקבועה 1.

לכל $c \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ נגדיר $c_n = \sum_{i \leq n} \frac{c(i)}{10^i}$. אז c_n הוא מספר רציונלי, ו-$c_n \leq o_n = \frac{10 - \frac{1}{10^n}}{9}$ (לפי הנוסחה לסדרה הנדסית). בפרט, הקבוצה $S_c = \{c_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ חסומה, ולכן יש לה חסם עליון $f(c) \in \mathbb{R}$. אנחנו טוענים שהפונקציה $c \mapsto f(c)$ עולה *ממש*, ובפרט חח"ע. אכן, אם $c \lhd d$, נסמן $i = \min(\{j \in \mathbb{N} \mid c(j) \neq d(j)\})$. אז $c(i) = 0$ ו-$d(i) = 1$, ונסמן $t = c_{i-1} = d_{i-1}$. אז לכל $n \geq i$ מתקיים $d_n \geq t + \frac{1}{10^i}$ ו-

$$c_n \leq t + \sum_{n \geq j > i} \frac{1}{10^j} = t + \frac{1 - \frac{1}{10^{n-i}}}{9 \cdot 10^i} \leq t + \frac{1}{9 \cdot 10^i}$$

(שוב לפי הנוסחה לסכום סדרה הנדסית), ולכן $f(c) \leq t + \frac{1}{9 \cdot 10^i} < t + \frac{1}{10^i} \leq f(d)$ כנדרש.

כיוון ש-$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$, משפט קנטור–ברנשטיין נותן את השקילות הנדרשת. $\square$

תרגיל 4.2.19. הוכיחו שהיחס $\trianglelefteq$ שהוגדר בהוכחה הוא אכן יחס סדר קווי.

מסקנה 4.2.20. *עצמת קבוצת הממשיים שאינם אלגבריים גדולה מעצמת הממשיים האלגבריים. בפרט, קיימים מספרים ממשיים שאינם אלגבריים.*

ההוכחה הפשוטה הזו לא מספקת *דוגמה* של מספר שאינו אלגברי. ניתן לבנות דוגמאות כאלה, וגם להוכיח שמספרים מוכרים כמו π ו-e אינם אלגבריים, אבל זה הרבה יותר קשה.

לסיום הסעיף, נחשב את העוצמה של מספר תתי-קבוצות פשוטות של $\mathbb{R}$.

תרגיל 4.2.21. הוכיחו:

(א) כל שני קטעים פתוחים לא ריקים הם שווי עוצמה, וכל שני קטעים סגורים אינסופיים הם שווי עוצמה (אפשר למצוא פונקציות מפורשות).

(ב) כל שני קטעים אינסופיים הם שווי עוצמה.

(ג) כל קטע אינסופי שווה עוצמה ל-$\mathbb{R}$.

4.3 עוצמות

המטרה הבאה שלנו היא ליצור מושג של "עוצמה" שניתן לשייך לקבוצה, כך ששתי קבוצות הן שוות עוצמה אם ורק אם העוצמה שלהן אכן שווה. ראינו בתרגיל 4.1.2 שוויון עוצמות הוא יחס שקילות, ולכן יש לנו דרך קאנונית לעשות זאת:

אוסף העוצמות

העוצמה

הגדרה 4.3.1. *אוסף העוצמות* הוא המנה $|\cdot| : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ של אוסף כל הקבוצות $\mathcal{S}$ ביחס $\sim$ של שוויון עוצמות. הערך $|A|$, עבור קבוצה A, נקרא *העוצמה* של A.

במלים אחרות, לכל שתי קבוצות A, B מתקיים: $A \sim B$ אם ורק אם $|A| = |B|$. לכן, $|A|$ הוא "מספר מוכלל" שסופר את כמות האיברים ב-A, ו-$\mathcal{C}$ הוא אוסף כל המספרים המוכללים הללו. אנחנו ננסה להבין את המבנה של $\mathcal{C}$.

היחס $\precsim$ הוא קדם סדר על אוסף הקבוצות. ראינו בתרגיל 2.4.7 שבמצב הזה $\precsim$ משרה יחס סדר על המנה ביחס השקילות $\precsim \cap \precsim^{-1}$. לפי משפט קנטור–שרודר–ברנשטיין, יחס השקילות הזה הוא היחס $\sim$ של שוויון עוצמות, ולכן אנחנו מקבלים יחס סדר $\leq$ על אוסף העוצמות. היחס מקיים: $A \precsim B$ אם ורק אם $|A| \leq |B|$, לכל שתי קבוצות A, B.

עוצמה סופית

עוצמה של קבוצה סופית נקראת *עוצמה סופית*. ראינו ששתי קבוצות סופיות הן שוות עוצמה אם ורק אם יש להן אותו מספר איברים, ובפרט אם $n < m$ אז $|\mathbb{N}^{<n}| < |\mathbb{N}^{<m}|$. אנחנו נזהה כל מספר $n \in \mathbb{N}$ עם $|\mathbb{N}^{<n}|$. אז עוצמה היא סופית בדיוק אם היא שווה ל-n עבור איזשהו $n \in \mathbb{N}$, והסדר בין העוצמות הסופיות הוא הסדר הרגיל.

איפה העוצמות הסופיות עומדות ביחס ליתר העוצמות?

טענה 4.3.2. *נניח ש-α עוצמה אינסופית. אז לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $n < \alpha$.*

הוכחה. נבחר קבוצה A כך ש-$|A| = \alpha$. לפי ההנחה, A אינסופית. נוכיח באינדוקציה על n שקיימת פונקציה חח"ע מ-$\mathbb{N}^{<n}$ ל-A. עבור $n = 0$ הפונקציה היחידה מהקבוצה הריקה היא חח"ע.

נניח ש-$f : \mathbb{N}^{<n} \to A$, חח"ע. כיוון ש-$A$ אינסופית, f אינה על, ולכן יש $a \in A$ שאינו בתמונה. אז $g = f \cup \{\langle n, a\rangle\}$ היא פונקציה חח"ע שמראה ש-$n + 1 \leq \alpha$. □

העוצמה של $\mathbb{N}$ מסומנת ב-$\aleph_0$. מה אפשר לומר לגביה? הטענה הבאה אומרת ש-$\aleph_0$ מינימלית מבין העוצמות האינסופיות.

טענה 4.3.3. *אם $\alpha < \aleph_0$, אז α סופית.*

הוכחה. נניח ש-$|A| \leq \aleph_0$. אז יש פונקציה חח"ע $f : A \to \mathbb{N}$. לפי טענה 3.5.6, התמונה של A היא סופית או שוות עצמה ל-$\mathbb{N}$. המקרה השני נוגד את ההנחה ש-$\alpha < \aleph_0$. □

ממשפט קנטור נובע שאין באוסף העוצמות איברים מקסימליים: אם $|A| = \alpha$ אז $\alpha < |\mathcal{P}(A)|$.

סוף הרצאה 13, 17 ביוני 2024

נוכיח עכשיו טענה שמחזקת את שתי הטענות האחרונות. הטענה תהיה כרוכה בהנחה שנדון עליה בהמשך.

טענה 4.3.4. *העוצמה $\aleph_0$ היא המינימום בין העוצמות האינסופיות: אם α עוצמה אינסופית, אז $\aleph_0 \leq \alpha$*

הוכחה. נבחר קבוצה A כך ש-$\alpha = |A|$. כיוון ש-A אינסופית, לכל תת-קבוצה סופית $B \subseteq A$ הקבוצה $A \setminus B$ לא ריקה. בפרט, לכל סדרה סופית $a \in A^*$ קיים איבר $t(a) \in A \setminus \operatorname{Im}(a)$.[2]
לפי מסקנה 3.2.13, קיימת פונקציה $f : \mathbb{N} \to A$ המקיימת $f(n) = t(f\restriction_{\mathbb{N}<n})$ לכל n. לפי בחירת t, פונקציה זו היא חח"ע (תרגיל) $\square$

ראינו שיש על $\mathcal{C}$ סדר שמרחיב את הסדר על $\mathbb{N}$. נראה כעת שקיימות גם פעולות חשבון. הרעיון הוא להכליל את הקשרים בין פעולות החשבון לפעולות על קבוצות המופיעים בטענה 3.5.9.

הגדרה 4.3.5. נניח ש-α ו-β עוצמות, ו-A, B קבוצות כך ש-$\alpha = |A|$ ו-$\beta = |B|$. אז

(א) *סכום העוצמות* הוא $\alpha + \beta = |A \coprod B|$, כאשר $A \coprod B = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$ (*האיחוד הזר* של A ו-B) סכום העוצמות / האיחוד הזר

(ב) *מכפלת העוצמות* היא $\alpha \cdot \beta = |A \times B|$ מכפלת העוצמות

(ג) *חזקת העוצמות* היא $\alpha^\beta = |A^B|$ חזקת העוצמות

תרגיל 4.3.6. הוכיחו שהפעולות מוגדרות היטב, כלומר, לא תלויות בבחירה של A ו-B (רמז: תרגיל 4.1.5 ומסקנה 2.3.19), ושההגדרה מתיישבת עם ההגדרה הרגילה של הפעולות הללו כאשר α, β עוצמות סופיות (טענה 3.5.9).

טענה 4.3.7. *נניח ש-α, β, γ עוצמות כלשהן.*

(א) $0 \cdot \alpha = 0$, $1 \cdot \alpha = \alpha$, $0 + \alpha = \alpha$, $\alpha^0 = 1$, $\alpha^1 = \alpha$, $1^\alpha = 1$ *ואם* $\alpha > 0$ *אז* $0^\alpha = 0$

(ב) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ *ו-*$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

(ג) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$, $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

(ד) $\gamma \cdot (\alpha + \beta) = \gamma \cdot \alpha + \gamma \cdot \beta$

(ה) $\alpha^{(\beta+\gamma)} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$

(ו) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^(\beta \cdot \gamma)$

(ז) $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$

(ח) *אם* $\alpha \le \beta$ *אז* $\gamma + \alpha \le \gamma + \beta$, $\gamma \cdot \alpha \le \gamma \cdot \beta$, $\alpha^\gamma \le \beta^\gamma$ *ו-*$\gamma^\alpha \le \gamma^\beta$ *אם* $\gamma \neq 0$ *או* $\alpha \neq 0$.

(ט) *אם* $\alpha \cdot \beta = 0$ *אז* $\alpha = 0$ *או* $\beta = 0$.

(י) *אם* $\alpha \le \beta$ *אז יש* δ *כך ש-*$\alpha + \delta = \beta$.

(יא) $\alpha < 2^\alpha$

[2] קיומה של הפונקציה $t : A^* \to A$ אינו מובן מאליו, נתייחס לזה בהמשך

תרגיל 4.3.8. הוכיחו את הטענה

נסיים את הסעיף עם מספר שאלות טבעיות, שעל חלקן נענה בהמשך.

שאלה 4.3.9. האם הסדר על העוצמות הוא קווי?

שאלה 4.3.10. נניח שיש פונקציה *על* מ-A ל-B. האם בהכרח $|A| \leq |B|$?

שאלה 4.3.11. האם הסדר על העוצמות צפוף?

שאלה 4.3.12. האם יש עוצמה בין $\aleph_0$ ל-$2^{\aleph_0}$?

שאלה 4.3.13. האם לכל עוצמה אינסופית α מתקיים $\alpha + \alpha = \alpha$ או $\alpha \cdot \alpha = \alpha$?

על-מנת לנסות לענות על השאלות הללו, צריך להבין יותר לעומק מה בדיוק נכון בעולם הקבוצות.

5 אקסיומות צרמלו–פרנקל

נניח שקיימת פונקציה f מקבוצה A על קבוצה B. האם נובע מזה ש-$|A| \leq |B|$? על מנת להוכיח את זה, יש למצוא פונקציה חח"ע $g : B \to A$. הגישה הכי סבירה היא לנסות למצוא פונקציה הפוכה מימין ל-f, כלומר, פונקציה $g : B \to A$ המקיימת $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. פונקציה כזו היא בבירור חח"ע, אבל האם היא קיימת?

על מנת לענות על השאלה הזו, ושאלות נוספות, עלינו להבין בצורה יותר מדויקת את מבנה עולם הקבוצות. הגישה שלנו עד-כה הייתה נאיבית: הנחנו שכל קבוצה שאפשר לתאר איכשהו היא קיימת. זו הייתה הגישה הרווחת עד לסוף המאה ה-19, אולם אז התגלו בה בעיות. המפורסמת ביותר היא *פרדוקס ראסל*: אם $P = \{X \mid X \notin X\}$ קבוצת הקבוצות שאינן שייכות לעצמן, האם $P \in P$? בכל אחת מהאפשרויות מגיעים לסתירה.

על-מנת להימנע ממצבים כאלה, אנחנו רוצים לאמץ גישה יותר זהירה, בדומה לגישה שנקטנו עבור המספרים הטבעיים: אנחנו נתאר את עולם הקבוצות באמצעות אקסיומות שמשקפות את האינטואיציה שלנו, ונעשה שימוש רק בקבוצות שקיומן מובטח על-ידי (או לפחות מתיישב עם) האקסיומות. כמה מהתכונות הרצויות עבור האקסיומות הללו:

(א) האקסיומות משקפות את האינטואיציה שלנו לגבי המושג "קבוצה".

(ב) האקסיומות מתארות עולם עשיר מספיק על מנת שנוכל לנסח בו את המתמטיקה

(ג) האקסיומות פשוטות ככל האפשר לבדיקה

(ד) האקסיומות לא מכילות סתירה

(ה) רשימת האקסיומות היא מלאה: כל טענה על קבוצות נובעת או מופרכת מהאקסיומות.

בפועל, האקסיומות שנציג משיגות רק חלק מהמטרות הנ"ל. זה לא מקרה: ישנם משפטים מתמטיים *שמוכיחים* שלא ניתן להשיג את כל המטרות הנ"ל.

5.1 האקסיומות הבסיסיות

קבוצות ותכונותיהן מתוארות באמצעות יחס בסיסי אחד, יחס השייכות $\underline{\in}$. כלומר, אנחנו מתארים מבנה M עם יחס דו מקומי $\underline{\in}$ עליו, שמקיים תנאים שונים אותם נפרט מיד. מבנה כזה ייחשב "מודל של תורת הקבוצות" (ליתר דיוק, מודל של קבוצת האקסיומות **ZF**), באותו אופן שמבנה עם סדר שמקיים את התנאים של הטבעיים הוא "מודל של הטבעיים". האיברים של M כזה ייקראו *קבוצות*, ובניגוד לכך, אוספים של אובייקטים "בעולם שלנו" ייקראו *אוספים* (ועבורם נשתמש בסימן הרגיל $\in$ עבור שייכות). בפרט, M עצמו הוא אוסף, אבל אינו קבוצה. הבדל נוסף עם הגישה הנאיבית הוא שלביטוי $a \underline{\in} b$ יש משמעות רק אם a, b שניהם קבוצות (כלומר איברים של M). זה נוגד את השימוש היומיומי, בו אנחנו מאפשרים אוספים של אובייקטים שונים. בסופו של דבר, זה לא יהווה בעיה, משום שהתכנון הוא שכל אובייקט מתמטי יהיה קבוצה.

קבוצות

אוספים

האקסיומה הראשונה אומרת שכל קבוצה נקבעת על-ידי האיברים שלה.

אקסיומה 5.1.1 (אקסיומת ההקפיות). *לכל x, y, אם לכל z מתקיים $z \underline{\in} y \leftrightarrow z \underline{\in} x$ אז $x = y$.*

הערה 5.1.2. לכל קבוצה $x \in M$ ניתן לשייך אוסף: $[x] = \{y \in M \mid y \underline{\in} x\}$. אקסיומת ההקפיות אומרת שהשיוך הזה הוא חח"ע: אם $[x_1] = [x_2]$ אז $x_1 = x_2$. לפעמים אומרים שאוסף הוא קבוצה אם הוא מהצורה $[x]$ עבור איזשהו x. באופן כזה, אפשר לחשוב על הקבוצות כתת-אוסף של כל האוספים. על מנת למנוע בלבול, אנחנו לרוב נמנע מהזיהוי בסעיף זה.

הכלה ניתנת להגדרה באמצעות שייכות: $x \subseteq y$ אם ורק אם $\forall z(z \underline{\in} x \rightarrow z \underline{\in} y)$. אז אקסיומת ההקפיות אומרת שאם $x \subseteq y$ ו-$y \subseteq x$ אז $x = y$.

אקסיומה 5.1.3 (אקסיומת הקבוצה הריקה). *קיימת קבוצה x עם התכונה* $\forall y(y \underline{\notin} x)$.

תרגיל 5.1.4. יש בדיוק קבוצה ריקה אחת

את הקבוצה הריקה היחידה מסמנים ב-$\underline{\emptyset}$.

סוף הרצאה 14, 18 ביוני 2024

על מנת להבין באיזו מידה האקסיומות מתארות דווקא את עולם הקבוצות כדאי לבדוק האם האקסיומות מתקיימות במבנים שונים לגמרי. למשל:

דוגמה 5.1.5. נסמן ב-M_0 את האוסף $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$ עם היחס $<$ בתור $\underline{\in}$. אז M_0 מקיים את שתי האקסיומות שרשמנו: אקסיומת ההקפיות אומרת שאם x, y שני מספרים (בין 0 ל-1) המקיימים: $a < x$ אם ורק אם $a < y$ לכל $a \in M_0$ אז $x = y$ (תרגיל 2.4.29). האקסיומה השני אומרת שקיים איבר שאין איבר קטן ממנו, זהו האיבר $0 \in M_0$. $\diamondsuit$

האקסיומות הבאות יאפשרו לנו לבנות זוגות ואיחודים.

אקסיומה 5.1.6 (אקסיומת הזוג). *לכל x, y קיים z כך ש-$x \underline{\in} z$ ו-$y \underline{\in} z$.*

אקסיומה 5.1.7 (אקסיומת האיחוד). *לכל קבוצה x קיימת קבוצה y המקיימת: לכל z, אם יש $w \in x$ כך ש-$z \in w$, אז $z \in y$. בסימונים:* $\forall x \exists y \forall z((\exists w(w \underline{\in} x \wedge z \underline{\in} w)) \rightarrow z \underline{\in} y)$

דוגמה 5.1.8. שתי האקסיומות האחרונות מתקיימות במבנה M_0 מדוגמא 5.1.5: האקסיומה הראשונה אומרת שלכל שני איברים ב-M_0 יש איבר שגדול מהם, אז זה נובע מכך שאין מקסימום. האקסיומה השניה אומרת שלכל מספר x יש מספר y כך שאם $z < w < x$ עבור איזשהו w, אז $z < y$. כיוון ש-w כזה קיים בדיוק אם $z < x$, התנאי הוא פשוט שכל מספר שקטן מ-x קטן גם מ-y, ואפשר לקחת $y = x$. $\diamondsuit$

האקסיומות האחרונות לא נותנות לנו בדיוק את קבוצות הזוג או האיחוד, רק קבוצות שמכילות אותן. זה ניתן לתיקון באמצעות האקסיומה הבאה:

אקסיומה 5.1.9 (אקסיומת ההפרדה). *לכל קבוצה y וכל תנאי ϕ קיימת הקבוצה $x = \{\!\{a \Subset y \mid \phi(a)\}\!\}$ המקיימת: $a \in x$ אם ורק אם $a \in y$, והתנאי ϕ מתקיים עבור a.*

הערה 5.1.10. בהינתן y ו-ϕ, קבוצה x כמו באקסיומה היא יחידה, לפי אקסיומת ההקפיות.

הערה 5.1.11. לא הגדרנו מה זה בדיוק "תנאי" ϕ, ומה זה אומר שהוא מתקיים עבור a. ההגדרה המדויקת חורגת מחומר הקורס (ונלמדת בקורס בלוגיקה), אבל בקירוב, אלה הם תנאים שניתנים לביטוי על-ידי נוסחאות כפי שהשתמשנו עד כה. נוסחה כזו נבנית במספר סופי של שלבים מנוסחאות בסיסיות באמצעות פעולות כמו $\wedge$ ("וגם"), $\vee$ ("או"), $\neg$ ("שלילה"), $\rightarrow$ ("גרירה") והכמתים $\forall$ ו-$\exists$. הנוסחאות הבסיסיות הן נוסחאות מהצורה $x \Subset y$ או $x = y$, כאשר x, y יכולים להיות משתנים או קבוצות אחרות.

מסקנה 5.1.12.

(א) *לכל שתי קבוצות x, y (לא בהכרח שונות), קיימת הקבוצה $\{\!\{x, y\}\!\}$ שהאיברים שלה הם בדיוק x, y.*

(ב) *לכל קבוצה x קיימת הקבוצה $\bigcup x$ שאיבריה הם הקבוצות ששייכות לפחות לאחת הקבוצות ב-x.*

בפרט, לכל שתי קבוצות x, y קיימת הקבוצה $\bigcup \{\!\{x, y\}\!\} = x \cup y$.

שימו לב להבדל בין $\{\!\{x, y\}\!\}$, קבוצה (כלומר איבר של M) שקיומה מובטח על-ידי המסקנה, ל-$\{x, y\}$, אוסף בן שני איברים של M.

הוכחה.

(א) לפי אקסיומת הזוג קיימת קבוצה z כך ש-$x \Subset z$ ו-$y \Subset z$. אז $\{\!\{x, y\}\!\} = \{\!\{u \Subset z \mid u = x \vee u = y\}\!\}$, ולכן קיומה מובטח על-ידי אקסיומת ההפרדה.

(ב) תהי y הקבוצה שמובטחת על-ידי אקסיומת האיחוד. אז

$$\bigcup x = \{\!\{z \Subset y \mid \exists w (w \Subset x \wedge z \Subset w)\}\!\}$$

קיימת לפי אקסיומת ההפרדה.

□

תרגיל 5.1.13. בידקו האם אקסיומת ההפרדה תקפה במבנה M_0 מדוגמא 5.1.5.

חשוב לשים לב שאקסיומת ההפרדה לא מאפשרת לנו להגדיר קבוצה על-ידי תנאי, אלא רק תת-קבוצה של קבוצה קיימת. זה מאפשר להגדיר את הקבוצות שאנחנו זקוקים להן, ועם זאת להימנע מפרדוקס ראסל, שהופך מפרדוקס לטענה הבאה:

טענה 5.1.14 (פרדוקס ראסל). *לא קיימת קבוצה s כך שלכל x מתקיים $x \in s$.*

ההוכחה היא בדיוק פרדוקס ראסל:

הוכחה. נניח בשלילה ש-s כזו קיימת. אז לפי אקסיומת ההפרדה, קיימת גם הקבוצה $p = \{x \in s \mid x \notin x\}$. אם $p \in p$ אז $p \notin p$ בגלל הגדרת הקבוצה p, ואם $p \notin p$ אז $p \in p$, שוב מהגדרת p. בכל מקרה, קיבלנו סתירה. $\square$

אקסיומת ההפרדה מאפשרת גם להגדיר חיתוך. זה לא דורש אקסיומה נוספת, משום שהחיתוך מוכל בכל אחת מהקבוצות הנחתכות.

טענה 5.1.15. *אם $x \neq \emptyset$, אז קיימת קבוצה (יחידה) $\bigcap x$ שאיבריה הם הקבוצות ששייכות לכל איברי x. בפרט, לכל שתי קבוצות z, y קיימת הקבוצה $x \cap y$.*

הוכחה. כיוון ש-x אינה ריקה, יש $t \in x$. אז $\bigcap x = \{y \in t \mid \forall z(z \in x \rightarrow y \in z)\}$ קיימת לפי אקסיומת ההפרדה. הטענה השניה מתקבלת באמצעות הפעלת הראשונה על $x = \{y, z\}$, שקיימת לפי אקסיומת הזוג. $\square$

אקסיומת הזוג מספקת לנו זוגות לא סדורים, אבל אנחנו מעוניינים גם בזוגות סדורים. אנחנו נייצג זוגות סדורים באמצעות קבוצות באופן הבא:

הגדרה 5.1.16. לכל שתי קבוצות x, y, *הזוג הסדור* $\langle\langle x, y\rangle\rangle$ הוא הקבוצה $\{\{x, y\}, \{x\}\}$ (שקיומה מובטח על-ידי אקסיומת הזוג). הזוג הסדור

שוב, יש לשים לב להבדל בין $\langle\langle x, y\rangle\rangle$ (קבוצה, איבר של M) ל-$\langle x, y\rangle$ (זוג איברים של M). הבנייה הספציפית של הזוג כקבוצה היא לא מהותית, מעבר לטענה הבאה:

טענה 5.1.17. *לכל x, y, z, w, אם $\langle\langle x, y\rangle\rangle = \langle\langle z, w\rangle\rangle$ אז $x = z$ ו-$y = w$.*

הוכחה. כיוון $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, w\}\}$, חייב להתקיים $\{x\} \in \{\{z\}, \{z, w\}\}$, ולכן $\{x\} = \{z\}$ או $\{x\} = \{z, w\}$. במקרה השני, בהכרח $x = w = z$, ובמקרה הראשון $x = z$, אז מתקיים $\{\{z\}, \{z, y\}\} = \{\{z\}, \{z, w\}\}$. מכאן, הבדיקה ש-$y = w$ דומה. $\square$

תרגיל 5.1.18. השלימו את ההוכחה

על-מנת לנסח טענות על יחסים, פונקציות, וכדומה, אנו זקוקים למכפלות קרטזיות ולקבוצות חזקה. מסתבר שהאקסיומה הבאה מספיקה:

אקסיומה 5.1.19 (אקסיומת קבוצת החזקה). *לכל קבוצה x קיימת קבוצה y כך שלכל z, אם $z \subseteq x$ אז $z \in y$.*

תרגיל 5.1.20. הוכיחו שלכל קבוצה x קיימת קבוצת החזקה $\mathcal{P}(x)$, שאיבריה הם תתי-הקבוצות של x.

טענה 5.1.21. *לכל שתי קבוצות x, y קיימת המכפלה הקרטזית $x \times y$, המקיימת: $u \in x \times y$ אם ורק אם קיימים $a \in x$ ו-$b \in y$ כך ש-$u = \langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle$.*

הוכחה. התנאי שמגדיר את קבוצת החזקה ניתן לביטוי באמצעות נוסחה, אז מספיק להראות שקיימת קבוצה שמכילה את כל הזוגות הללו. הזוג $\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle$ הוא הקבוצה $\{\!\{ \{\!\{a, b\}\!\}, \{\!\{a\}\!\} \}\!\}$, שני האיברים שלו הם תתי-קבוצות של $x \cup y$, ולכן $\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle \subseteq \underline{\mathcal{P}}(x \cup y)$ כלומר $\langle\!\langle a, b \rangle\!\rangle \underline{\in} \underline{\mathcal{P}}(\underline{\mathcal{P}}(x \cup y))$. $\square$

כעת ניתן לחזור על חלקים גדולים מהקורס בתוך העולם M:

תרגיל 5.1.22. נניח ש-x, y קבוצות. הוכיחו שקיימות הקבוצות הבאות:

(א) הקבוצה y^x של כל הפונקציות מ-x ל-y.

(ב) קבוצת יחסי הסדר על x

(ג) קבוצת יחסי השקילות על x

תרגיל 5.1.23. הוכיחו שלכל קבוצה x ולכל יחס שקילות e על x (כלומר, לכל תת-קבוצה $e \subseteq x \times x$ המקיימת את האקסיומות של יחס שקילות) קיימת העתקת מנה $\pi : x \to y$ (כלומר, $\pi \underline{\in} y^x$)

האקסיומות עד-כה, בצירוף אקסיומת האינסוף שתינתן בהמשך, מהוות את האקסיומות של צרמלו $\mathbf{Z}$. אקסיומות צרמלו–פרנקל $\mathbf{ZF}$ כוללות בנוסף שתי אקסיומות שלא יופיעו בקורס הזה, אקסיומת ההפרדה ואקסיומת היסוד.

5.2 אקסיומת האינסוף והמספרים הטבעיים

אם M עולם של קבוצות המקיים את כל האקסיומות (שניתן בסופו של דבר), תת-האוסף שמורכב מקבוצות סופיות מקיים את כל האקסיומות שניתנו עד כה. במלים אחרות, מהאקסיומות שניתנו עד כה לא ניתן להסיק את קיומה של קבוצה אינסופית (ובשלב זה, עדיין לא הגדרנו מה זה).

הקבוצה האינסופית הבסיסית ביותר שעסקנו בה היא קבוצת המספרים הטבעיים. בסעיף זה נבנה את קבוצת המספרים הטבעיים כקבוצה סדורה, באמצעות אקסיומה נוספת. נתחיל מלהבין כל מספר טבעי בנפרד.

הרעיון הוא לייצר את הקבוצות $\mathbb{N}^{<n}$, ולייצג את המספר n על-ידי הקבוצה הזו. כמובן שבשלב זה אין לנו אפשרות להשתמש בהגדרה הזו ישירות, אבל:

(א) כאשר $n = 0$, הקבוצה הזו היא הקבוצה הריקה, אותה כבר יש לנו, אז נגדיר $0 = \underline{\emptyset}$.

(ב) לכל n מתקיים $\mathbb{N}^{<n+1} = \mathbb{N}^{<n} \cup \{n\}$. לכן, אם n מיוצג על-ידי הקבוצה $\mathbb{N}^{<n}$, אז $\mathbb{N}^{<n+1} = \mathbb{N}^{<n} \cup \{\mathbb{N}^{<n}\}$. במלים אחרות, $\mathbb{N}^{<n+1} = s(\mathbb{N}^{<n})$, במונחי ההגדרה הבאה

הגדרה 5.2.1. לכל קבוצה x, *העוקב* של x מוגדר כ-$s(x) = x \cup \{\!\{x\}\!\}$. העוקב

נשים לב שהעוקב של קבוצה x הוא לא בהכרח העוקב של x במשמעות של קבוצות סדורות — קבוצה כללית x אינה איבר בקבוצה סדורה ספציפית. עבור המספרים הטבעיים, אותם נגדיר בקרוב, פונקציית העוקב תתלכד עם פונקציית העוקב במובן של הסדר.

דוגמה 5.2.2. כבר החלטנו ש-$\mathbf{0} = \emptyset$. נגדיר:

(א) $\mathbf{1} = s(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$

(ב) $\mathbf{2} = s(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \cup \{\mathbf{1}\} = \{\mathbf{0}, \{\mathbf{0}\}\}$

(ג) $\mathbf{3} = s(\mathbf{2}) = \mathbf{2} \cup \{\mathbf{2}\} = \{\mathbf{0}, \{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{0}, \{\mathbf{0}\}\}\}$

(ד) וכו...

$\diamondsuit$

זה מאפשר לנו להגדיר כל מספר טבעי בנפרד. אם אנחנו רוצים להגדיר את הטבעיים באופן ש-s תהיה פונקציית העוקב, עלינו לדרוש לפחות שהיא סגורה תחת s, במובן הבא.

הגדרה 5.2.3. *קבוצה אינדוקטיבית* היא קבוצה x כך ש-$\emptyset \in x$ ולכל $y \in x$ גם $s(y) \in x$. קבוצה אינדוקטיבית

אינטואיטיבית ברור שקבוצה אינדוקטיבית חייבת להיות אינסופית, ולכן קיומה של קבוצה כזו לא נובע מהאקסיומות שיש לנו עד כה.

אקסיומה 5.2.4 (אקסיומת האינסוף). *קיימת קבוצה אינדוקטיבית*

סוף הרצאה 15, 19 ביוני 2024

אנחנו נבנה את הטבעיים כקבוצה האינדוקטיבית הקטנה ביותר:

טענה 5.2.5. *קיימת קבוצה אינדוקטיבית ω המוכלת בכל קבוצה אינדוקטיבית.*

כמובן ש-ω כזו היא יחידה.

הוכחה. לפי אקסיומת האינסוף, קיימת קבוצה אינדוקטיבית x. קבוצת כל תתי-הקבוצות של x שהן אינדוקטיביות קיימת לפי אקסיומות החזקה וההפרדה, נסמן אותה ב-f. הקבוצה אינה ריקה, משום ש-$x \in f$. נסמן $\omega = \bigcap f$. אז ω אינדוקטיבית (תרגיל). אם y קבוצה אינדוקטיבית כלשהי, אז $\omega \cap y \in f$, ולכן $\omega = \omega \cap y$, כלומר $\omega \subseteq y$. $\square$

מסקנה אחת היא שאם $P \subseteq \omega$ תת-קבוצה אינדוקטיבית, אז $P = \omega$. כלומר, עקרון האינדוקציה (הרגילה) נכון עבור ω. זה מאפשר להוכיח כמה טענות בסיסיות על איברי ω:

טענה 5.2.6. *לכל* $n, m \in \omega$:

(א) $n \subseteq \omega$

(ב) *אם* $n \in m$ *אז* $n \subseteq m$

(ג) $n \notin n$. *בפרט,* $n \subset s(n)$

(ד) $n \subset m$ *אם ורק אם* $n \in m$.

(ה) $n \subseteq m$ *או* $m \subseteq n$.

נעיר ש-(ה) אומר למעשה שיחס השייכות הוא טרנזיטיבי על ω.

הוכחה. (א) תרגיל

(ב) תרגיל

(ג) תרגיל

(ד) תרגיל

(ה) באינדוקציה על m. נתבונן בקבוצה $P = \{m \in \omega \mid \forall n \in \omega (n \subseteq m \vee m \subseteq n)\}$. ברור ש-$\underline{\emptyset} \in P$. נניח ש-$m \in P$ ונוכיח ש-$s(m) \in P$. נבחר $n \in \omega$ כלשהו. אם $n \subseteq m$ אז גם $n \subseteq s(m)$ וסיימנו. אחרת, כיוון ש-$m \in P$, מתקיים $m \subset n$. לפי (ה), זה אומר ש-$m \in n$. לכן $s(m) = m \cup \{m\} \subseteq n$. $\square$

תרגיל 5.2.7. השלימו את ההוכחה

משפט 5.2.8. *הקבוצה האינדוקטיבית הקטנה ביותר ω (מטענה 5.2.5) עם סדר ההכלה היא מודל של הטבעיים, והפונקציה s היא פונקציית העוקב על ω.*

לכן, אפשר להשתמש ב-ω בתור מודל ספציפי של הטבעיים.

הוכחה. נוכיח שעקרון המינימום מתקיים ב-$\langle \omega, \subseteq \rangle$ (ההוכחה דומה לתרגיל 3.1.6): נניח שב-$A \subseteq \omega$ אין מינימום. נתבונן בקבוצה $P = \{n \in \omega \mid n \cap A = \underline{\emptyset}\}$ ונוכיח שהיא אינדוקטיבית. ברור ש-$\underline{\emptyset} \in P$. נניח ש-$n \in P$. עלינו להוכיח ש-$s(n) \cap A = \underline{\emptyset}$. כיוון ש-$s(n) = n \cup \{n\}$, ו-$n \cap A = 0$ לפי הנחת האינדוקציה, מספיק להוכיח ש-$n \notin A$.

נניח בשלילה ש-$n \in A$ ונראה ש-n הוא המינימום של A. אם $m \in A$ אז לפי טענה 5.2.6(ה), $m \subset n$ או $n \subseteq m$. במקרה הראשון $m \in n$ לפי טענה 5.2.6(ה), כלומר $m \in n \cap A$ בסתירה להנחה שהיתוך זה ריק. לכן $n \subseteq m$, כלומר n המינימום ב-A, בסתירה להנחה שב-A אין מינימום.

הוכחנו ש-P אינדוקטיבית, ולכן $P = \omega$. מכך נובע ש-A ריקה, משום שאם $n \in \omega$ כלשהו, אז $s(n) \in P$, כלומר $(n \cup \{n\}) \cap A$ ריקה. בפרט, $n \notin A$. זה מסיים את הוכחת עקרון המינימום.

לכל $n \in \omega$ מתקיים $n \subseteq s(n) = n \cup \{n\}$, ולפי טענה 5.2.6(ה), זוהי הכלה ממש. לכן, ב-ω אין מקסימום, ו-$s(n)$ הוא עוקב של n. כיוון שיש ב-$s(n)$ רק איבר אחד יותר מאשר ב-n, זהו העוקב המיידי.

לבסוף, אם ל-$n \in \omega$ אין קודם מיידי, ו-$n \neq \underline{\emptyset}$, אז $\omega \setminus \{n\}$ תת-קבוצה ממש אינדוקטיבית, בסתירה למינימליות. $\square$

סוף הרצאה 16, 24 ביוני

5.3 אקסיומת הבחירה

אנחנו עכשיו רוצים לענות על השאלה: אם יש פונקציה מ-A על B, האם נובע מכך ש-$|B| \leq |A|$? אינטואיטיבית, התשובה היא "כן", אך ללא אקסיומה נוספת אנחנו לא יודעים לענות על השאלה בוודאות[3]. על מנת לנסח את האקסיומה, נגדיר:

[3] זו בעיה פתוחה האם הטענה נובעת מהאקסיומות שראינו עד כה

הגדרה 5.3.1. לכל קבוצה X, *פונקציית בחירה* עבור X היא פונקציה $f : \underline{\mathcal{P}}(X) \setminus \{\!\!\{\underline{\emptyset}\}\!\!\} \to X$ כך שלכל $A \subseteq X$ לא ריקה מתקיים $f(A) \in A$. פונקציית בחירה

במלים אחרות, פונקציית בחירה בוחרת איבר מכל תת-קבוצה. לשם הנוחות, נסמן $\underline{\mathcal{P}}(X)_+ = \underline{\mathcal{P}}(X) \setminus \{\!\!\{\underline{\emptyset}\}\!\!\}$.

דוגמה 5.3.2. עבור $X = \omega$ קיימת פונקציית בחירה: לכל $A \subseteq \omega$ לא ריקה, נגדיר $f(A) = \min(A)$. המינימום קיים לפי עקרון המינימום.

באופן יותר כללי, אם X קבוצה בת-מנייה, אז קיימת לה פונקציית בחירה: נקבע פונקציה חח"ע $t : X \to \omega$, ולכל $A \subseteq X$ לא ריקה נגדיר $g(A) = t^{-1}(f(t[A]))$, כאשר f פונקצית בחירה עבור ω. כלומר, g בוחרת את האיבר a ב-A עבורו $t(a)$ מינימום. $\diamondsuit$

אקסיומה 5.3.3 (אקסיומת הבחירה). *לכל קבוצה יש פונקציית בחירה.*

מערכת האקסיומות שכוללת את כל האקסיומות הקודמות וגם את אקסיומת הבחירה נקראת **ZFC** (צרמלו–פרנקל+בחירה). זוהי מערכת האקסיומות הסטנדרטית בה כל המתמטיקה אמורה להתקיים.

לאקסיומת הבחירה יש מספר גדול של ניסוחים שקולים (ביחס ל-**ZF**). נזכיר עכשיו מספר ניסוחים דומים, ובהמשך טענות שקולות שנראות שונות לגמרי. נזכיר שאם $f : A \to B$ פונקציה, *הפכית ימנית של* f (או *חתך של* f) היא פונקציה $g : B \to A$ כך ש-$f \circ g = \mathrm{Id}_B$. נזכיר גם שאם $b \in B$, *הסיב של* f מעל b הוא הקבוצה $\{\!\!\{a \in A \mid f(a) = b\}\!\!\}$ = $\hat{f}(b)$. אז $\hat{f}$ היא פונקציה מ-B ל-$\underline{\mathcal{P}}(A)$, ו-$f$ היא על אם ורק אם כל הסיבים הם לא ריקים, כלומר $\hat{f}(b) \in \underline{\mathcal{P}}(A)_+$ לכל $b \in B$. הפכית ימנית חתך הסיב

תרגיל 5.3.4. אם ל-$f : A \to B$ יש הפכית ימנית אז f על, וכל הפכית ימנית כזו היא חח"ע.

טענה 5.3.5. *אקסיומת הבחירה שקולה לטענה: לכל פונקציה על* $f : A \to B$ *יש הפכית ימנית.*

השילוב של הטענה והתרגיל מראים את מה שרצינו: אם יש $f : A \to B$ על, אז $B \precsim A$.

הוכחה. נניח את אקסיומת הבחירה, ונניח ש-$f : A \to B$ על. תהי $t : \underline{\mathcal{P}}(A)_+ \to A$ פונקציית בחירה. אז $g = t \circ \hat{f} : B \to A$ היא הפכית ימנית של f (נשים לב $\hat{f}$ היא אכן עם ערכים ב-$\underline{\mathcal{P}}(A)_+$, משום ש-$f$ היא על).

בכיוון השני, נניח שלכל פונקציה על יש הפכית מימין, ונניח שנתונה קבוצה X. עלינו להוכיח של-X יש פונקצית בחירה. נסמן $B = \underline{\mathcal{P}}(X)_+$ ו-$A = \{\!\!\{\langle x, u\rangle \in X \times \underline{\mathcal{P}}(X) \mid x \in u\}\!\!\}$ (במלים אחרות, A היא יחס השייכות על X). נגדיר $f : A \to B$ על-ידי $f(\langle x, u\rangle) = u$. נשים לב ש-$f$ אכן מקבלת ערכים ב-$\underline{\mathcal{P}}(X)_+$: אם $\langle x, u\rangle \in A$, אז u לא ריקה (היא כוללת את x). כמו-כן, f היא על: אם $u \in B$ אז u לא ריקה, ולכן יש בה איבר x. אז $f(\langle x, u\rangle) = u$.

לפי ההנחה, קיימת ל-f הפכית ימנית $g : B \to A$. זה אומר שלכל $u \in B$ יש $x \in u$ כך ש-$g(u) = \langle x, u\rangle$. אז $t : B \to X$ הנתונה על-ידי $t = \pi_1 \circ g$ (כאשר π_1 ההטלה לקואורדינטה הראשונה) היא פונקציית בחירה עבור X. $\square$

הערה 5.3.6. ראינו שלכל פונקציה $f : A \to B$ אפשר להתאים פונקציה $\hat{f} : B \to \underline{\mathcal{P}}(A)$, שמתאימה לכל $b \in B$ את הסיב של f מעל b. אפשר לשאול, האם כל פונקציה $h : B \to \underline{\mathcal{P}}(A)$

היא מהצורה $\hat{f}$ עבור איזושהי f. התשובה היא לא: הפונקציה $\hat{f}$ בהכרח מקיימת $\hat{f}(b_1) \cap \hat{f}(b_2) = \underline{\emptyset}$ אם $b_1 \neq b_2$. אבל במהלך ההוכחה בנינו פונקציה $f : A' \to B$ ופונקציה $\pi : A' \to A$ כך שלכל $b \in B$ הצמצום של π ל-$\hat{f}(b)$ הוא פונקציה הפיכה מ-$\hat{f}(b)$ ל-$h(b)$. הקבוצה A' היא למעשה האיחוד הזר של הקבוצות $h(b)$, עבור כל ה-$b \in B$.

על מנת להראות ניסוחים נוספים, ניתן עוד כמה הגדרות.

מערכת נציגים

הגדרה 5.3.7. אם E יחס שקילות על קבוצה X, *מערכת נציגים* עבור E היא תת-קבוצה $Y \subseteq X$ כך שלכל $x \in X$ קיים $y \in Y$ יחיד עבורו xEy.

דוגמה 5.3.8. הגדרנו את $\mathbb{Q}$ כמנה של $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ ביחס השקילות $\langle a, b \rangle E \langle c, d \rangle$ אם $ad = bc$. ליחס השקילות הזה יש מערכת נציגים: כל איבר ב-$\mathbb{Q}$ מיוצג על-ידי שבר מצומצם, כלומר זוג $\langle a, b \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ כך ש-a, b זרים. $\diamondsuit$

טענה 5.3.9. *אקסיומת הבחירה שקולה לכך שלכל יחס שקילות (על כל קבוצה) יש מערכת נציגים.*

תרגיל 5.3.10. הוכיחו את הטענה

תרגיל 5.3.11. נניח ש-E יחס שקילות על קבוצה X. הוכיחו שאם ל-E יש מערכת נציגים אז יש לו העתקת מנה $\pi : X \to Y \subseteq X$ אל תוך X.

המכפלה הקרטזית

הגדרה 5.3.12. נניח ש-D היא קבוצה (של קבוצות). *המכפלה הקרטזית* של הקבוצות ב-D היא הקבוצה $\bigtimes D = \{\!\!\{ g : D \to \bigcup D \mid \forall d \in D (g(d) \in d) \}\!\!\}$.

הערה 5.3.13. אם $D = \{\!\!\{ A, B \}\!\!\}$ קבוצה של שתי קבוצות, אז $\bigtimes D$ לא בדיוק זהה ל-$A \times B$, אבל יש זיהוי קאנוני: הזוג $\langle a, b \rangle \in A \times B$ מתאים לפונקציה $g : D \to A \cup B$ הנתונה על-ידי $g(A) = a$ ו-$g(B) = b$. מאידך, פונקציה $g \in \bigtimes D$ מותאמת לזוג $\langle g(A), g(B) \rangle$.

אם D קבוצה כמו בהגדרה, מקבלים קבוצה של עוצמות $\bar{D} = \{\!\!\{ |A| \mid A \in D \}\!\!\}$, ואפשר לחשוב על העוצמה של $\bigtimes D$ כמכפלה של העוצמות ב-$\bar{D}$.[4] קל לבדוק שאם $\underline{\emptyset} \in D$, אז $\bigtimes D = \underline{\emptyset}$ (כלומר, מכפלה של עוצמות שאחת מהן היא 0 היא בעצמה 0). האם הכיוון השני נכון? האם מכך שהמכפלה היא 0 ניתן להסיק שאחד הגורמים היה 0?

תרגיל 5.3.14. אקסיומת הבחירה שקולה לטענה: לכל קבוצה D של קבוצות, אם $\bigtimes D = \underline{\emptyset}$ אז $\underline{\emptyset} \in D$.

סוף הרצאה 17, 26 ביוני

הטענה הבאה מראה שלאקסיומת הבחירה עשויות להיות גם השלכות שליליות. נסמן ב-S^1 את מעגל היחידה במישור. אנחנו מתעניינים בשאלה: האם אפשר ליחס בצורה טבעית "אורך" לכל תת-קבוצה של S^1? במלים אחרות, אנחנו מחפשים פונקציה $l : \mathcal{P}(S^1) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (אל הממשיים האי-שליליים), בעלת התכונות הבאות:

(א) לכל $X \subseteq S^1$ ולכל $r \in \mathbb{R}$ מתקיים $l(X) = l(r + X)$, כאשר $r + X$ היא הקבוצה המתקבלת מסיבוב X בזווית $2\pi \cdot r$ סביב הראשית (שימו לב ש-$r + X = X$ לכל r שלם).

[4] יש כאן מספר אי-דיוקים: ראשית, העובדה ש-$\bar{D}$ היא אכן קבוצה נובעת מאקסיומה שלא הזכרנו. שנית, הבדיקה שההגדרה הזו לא תלויה בקבוצה D של נציגים דורשת בעצמה שימוש באקסיומת הבחירה. אנחנו לא נשתמש במכפלות כאלה מעבר לאינטואיציה

(ב) אם $\mathcal{C}$ קבוצה בת-מנייה ולא ריקה של תתי-קבוצות זרות של S^1, אז $l(\bigcup\mathcal{C}) = \sup\{l(X_1)+\dots+l(X_n) \mid X_1,\dots,X_n \in \mathcal{C}\}$ (בפרט, $l(X\cup Y) = l(X)+l(Y)$ אם X, Y זרות).

(ג) $l(S^1) = 1$ (או כל מספר גדול מאפס).

טענה 5.3.15. *בהנחת אקסיומת הבחירה, לא קיימת פונקציית אורך עם התכונות לעיל*

הוכחה. נגדיר יחס E על S^1 על-ידי: xEy אם $\{x\} = r + \{y\}$ עבור מספר רציונלי r. קל לוודא ש-E יחס שקילות. מאקסיומת הבחירה נובע שקיימת ליחס הזה מערכת נציגים $Y \subseteq S^1$ (טענה 5.3.9).

נשים לב:

(א) לכל שני רציונליים שונים $0 \le r_1, r_2 < 1$, הקבוצות $r_1 + Y$ ו-$r_2 + Y$ זרות (משום שב-Y אין נקודות שקולות).

(ב) S^1 היא האיחוד (הזר) של הקבוצות $r+Y$, עבור $0 \le r < 1$ (כי כל איבר של S^1 שקול לאיבר כלשהו של Y).

נסמן $\mathcal{C} = \{r+Y \mid r \in \mathbb{Q}\}$. אז $\mathcal{C}$ בת-מנייה ו-S^1 היא האיחוד הזר של $\mathcal{C}$. לכן, לפי שתי התכונות האחרונות,

$$1 = l(S^1) = l(\bigcup\mathcal{C}) = \sup\{l(r_1+Y)+\dots+l(r_n+Y) \mid r_i \in \mathbb{Q}, 0 \le r_i < 1\}$$

לפי התכונה הראשונה, $l(r_i+Y) = l(Y)$ לכל i, ולכן הסכומים הרשומים בתנאי הקבוצה הם מהצורה $nl(Y)$, כאשר $n \in \mathbb{N}$ כלשהו. אבל החסם העליון של $\{nl(Y) \mid n \in \mathbb{N}\}$ הוא 0 אם $l(Y) = 0$ ולא קיים אם $l(Y) > 0$. □

הערה 5.3.16. אקסיומת הבחירה נראית קצת פחות מובנת מאליה מאשר יתר האקסיומות: היא קובעת קיום של פונקציה ללא שום דרך לתאר מהי. הייתה תקופה בה הייתה חוסר הסכמה לגבי קבלתה. בהקשר הזה אפשר לשאול כמה שאלות:

(א) האם אקסיומת הבחירה עומדת בסתירה ליתר האקסיומות ב-**ZF**? התשובה היא לא: אם ב-**ZF** אין סתירה, אז גם ב-**ZFC** אין. זהו משפט של קורט גדל.

(ב) האם אקסיומת הבחירה נובעת מיתר האקסיומות ב-**ZF**? גם פה התשובה היא לא, משפט של פול כהן מראה שאין סתירה בין **ZF** לשלילת אקסיומת הבחירה, בהנחה שאין סתירה ב-**ZF**.

(ג) האם ב-**ZF** עצמה יש סתירה? אם ב-**ZF** אין סתירה, אז לא ניתן להוכיח זאת. זוהי לא טענה פילוסופית אלא *משפט מתמטי*, גרסא של משפט אי-השלמות השני של גדל.

(ד) האם כל מה שנכון בעולם הקבוצות נובע מ-**ZFC**? התשובה היא לא, וגם לא ניתן לייצר רשימה אחרת של אקסיומות שתהיה שלמה במובן הזה. גם זה הוכח מתמטית — זהו משפט אי השלמות הראשון של גדל.

(ה) האם יש דוגמא מעניינת לטענה ש-**ZFC** לא מכריעה? *השערת הרצף* אומרת שלא קיימת עוצמה גדולה מ-$\aleph_0$ וקטנה מ-$2^{\aleph_0}$. השערה זו מתיישבת עם **ZFC** (משפט של גדל), וגם שלילתה מתיישבת עם **ZFC** (משפט של פול כהן). השערת הרצף

5.4 הלמה של צורן

הטענה הבאה, *ששקולה* לאקסיומת הבחירה (בהינתן **ZF**) נראית הרבה פחות אינטואיטיבית, אבל היא שימושית מאוד בכל תחומי המתמטיקה. נזכיר *ששרשרת* בקס"ח היא תת-קבוצה של הקס"ח שהסדר המושרה עליה הוא קווי. שרשרת

משפט 5.4.1 (הלמה של צורן). *נניח ש-$\langle X, \preceq\rangle$ קס"ח, כך שכל שרשרת $\mathcal{C} \subseteq X$ חסומה מלמעלה על-ידי איבר ב-X. אז יש ב-X איבר מירבי.*

בהמשך נוכיח שהטענה הזו נובעת מאקסיומת הבחירה, אבל ראשית נראה מגוון שימושים. עד סוף הסעיף, נניח את הלמה של צורן.

טענה 5.4.2. *לכל קסח $\langle Y, R_0\rangle$ קיים סדר קווי R על Y המרחיב את R_0.*

הוכחה. ראינו בטענה 2.4.26 שסדר על Y הוא קווי אם ורק אם הוא מירבי בקבוצה $\mathcal{O}(Y)$ של הסדרים החלקיים על Y (סדורה תחת הכלה). לכן, על מנת להוכיח את הטענה, מספיק להראות שיש איבר כזה שמרחיב את R_0. נתבונן בתת-הקבוצה $X = \{R \in \mathcal{O}(Y) \mid R_0 \subseteq R\}$. איבר מירבי בה הוא מירבי גם ב-$\mathcal{O}(Y)$, ולכן מספיק למצוא ב-X איבר מירבי.

נוכיח ש-X מקיימת את תנאי הלמה של צורן. נניח ש-$\mathcal{C} \subseteq X$ שרשרת. נגדיר $R = \bigcup \mathcal{C}$. ברור ש-R מכיל את כל איברי $\mathcal{C}$, ולכן מספיק להראות ש-R סדר חלקי.

רפלקסיביות R מכיל את היחס הרפלקסיבי R_0 (כולם מעל Y), ולכן רפלקסיבי בעצמו.

אנטי-סימטריות נניח ש-$y_1 R y_2$ וגם $y_2 R y_1$. אז קיימים יחסים $R', R'' \in \mathcal{C}$ כך ש-$y_1 R' y_2$ ו-$y_2 R'' y_1$. כיוון ש-$\mathcal{C}$ שרשרת, בה"כ $R' \subseteq R''$, אז מתקיים גם $y_1 R'' y_2$. כיוון ש-R'' אנטי-סימטרי, $y_1 = y_2$.

טרנזיטיביות דומה: אם $y_1 R y_2$ ו-$y_2 R y_3$, אז קיימים $R', R'' \in \mathcal{C}$ כך ש-$y_1 R' y_2$ ו-$y_2 R'' y_3$ ובה"כ $R' \subseteq R''$. מטרנזיטיביות R'' נובע $y_1 R'' y_3$ ולכן גם $y_1 R y_3$.

הוכחנו שלכל שרשרת ב-X יש חסם מלמעלה. לפי הלמה של צורן, יש ב-X איבר מירבי, וכל איבר כזה פותר את הבעיה. □

את החלק הראשון של הטיעון ניתן להכליל:

תרגיל 5.4.3. נניח ש-$\langle X, \preceq\rangle$ קס"ח בה כל שרשרת חסומה מלמעלה. הוכיחו שלכל $x \in X$ יש $y \in X$ מירבי המקיים $x \preceq y$.

הערה 5.4.4. ראינו בתרגיל 3.5.8 שאם הקס"ח X היא *סופית*, אז יש בה איבר מירבי ללא שום הנחות (והשתמשנו בזה כדי להוכיח את טענה 5.4.2 למקרה הסופי). אפשר לראות את בלמה של צורן הכללה של התרגיל הזה: אינטואיטיבית, אנחנו מתחילים מאיבר כלשהו, ומגדילים אותו שוב ושוב, עד שלא ניתן להמשיך, וזה האיבר המירבי. במקרה הסופי, התהליך הזה נפסק אחרי מספר סופי של צעדים. במקרה הכללי, לא ברור שהתהליך עשוי להסתיים, אולם הוא יוצר שרשרת, וההנחה על קיום החסם מאפשרת לדלג עליה ולהמשיך הלאה. בהמשך, נראה הוכחה מדויקת של הלמה של צורן בסגנון הזה.

סוף הרצאה 18, 1
ביולי

הלמה של צורן מאפשרת לנו גם לענות על שאלה בסיסית בנוגע לסדר בין העוצמות.

טענה 5.4.5. *לכל שתי עוצמות α ו-β מתקיים $\alpha \leq \beta$ או $\beta \leq \alpha$ (במלים אחרות, הסדר על העוצמות הוא קווי)*

הוכחה. נבחר קבוצות A, B כך ש-$|A| = \alpha$ ו-$|B| = \beta$. נתבונן בקבוצה $X \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ של פונקציות חח"ע מתת-קבוצה של A ל-B. אם $\mathcal{C}$ שרשרת ב-X, אז $f = \bigcup \mathcal{C}$ גם ב-X: זוהי פונקציה לפי המשפט על הדבקת פונקציות, ואותו נימוק עבור f^{-1} מראה ש-f חח"ע.

לפי הלמה של צורן, יש ב-X איבר מירבי g. אנחנו טוענים ש-g פונקציה חח"ע שתחומה A או שהתמונה שלה B. אחרת, קיימים $a \in A \setminus \mathrm{Dom}(g)$ ו-$b \in B \setminus \mathrm{Im}(g)$, אבל אז $g \cup \{\langle a, b \rangle\}$ פונקציה חח"ע שמרחיבה את g, בסתירה למירביות של g.

אם התחום של g הוא A אז $\alpha \leq \beta$, ובמקרה השני g^{-1} מראה ש-$\beta \leq \alpha$. $\square$

הטענה הבאה מראה כיוון אחד של השקילות בין הלמה של צורן לאקסיומת הבחירה.

טענה 5.4.6. *אקסיומת הבחירה נובעת מהלמה של צורן*

הוכחה. נוכיח שלכל $f : A \to B$ על יש הפכית ימנית (טענה 5.3.5). נסתכל על הקבוצה X של פונקציות $g : C \to A$ כאשר $C \subseteq B$ ו-$f \circ g = \mathrm{Id}_C$. קבוצה זו מקיימת את תנאי הלמה של צורן, ואיבר מקסימלי g בה הוא הפכית ימנית ל-f: אחרת, יש $b \in B$ שאינו בתחום של g. כיוון ש-f על, יש $a \in A$ כך ש-$f(a) = b$. אז $g \cup \{\langle b, a \rangle\} \in X$ סותרת את המקסימליות של g. $\square$

תרגיל 5.4.7. השלימו את ההוכחה

עד כה, בכל השימושים שלנו בלמה של צורן, הקבוצה X הייתה קבוצה של קבוצות, יחס הסדר היה הכלה, והחסם מלעיל על שרשרת היה האיחוד האונרי שלה. במלים אחרות, השתמשנו לכאורה בגרסא חלשה יותר של הלמה של צורן מהגרסא הכללית. למעשה, מסתבר שהגרסאות שקולות, אפילו עם הנחות יותר חזקות:

טענה 5.4.8 (הלמה של צורן, גרסא חלשה). *נניח ש-S קבוצה, $X \subseteq \mathcal{P}(S)$ תת-קבוצה המקיימת:*

(א) $\emptyset \in X$.

(ב) *אם* $\mathcal{C} \subseteq X$ *שרשרת אז* $\bigcup \mathcal{C} \in X$.

(ג) *אם* $A \in X$ *אינה מירבית, אז יש* $s \in S$ *כך ש-*$A \cup \{s\} \in X$.

אז ב-X יש איבר מירבי.

כמובן שהטענה הזו נובעת מהלמה של צורן, אבל מסתבר שגם להיפך:

תרגיל 5.4.9. הוכיחו שהלמה של צורן נובעת מהגרסא החלשה 5.4.8 (*רמז:* בהינתן קס"ח S המקיימת את הנחות הלמה של צורן בניסוח הרגיל, הסתכלו בקבוצה X של כל השרשראות ב-S)

נוכיח עכשיו, באמצעות מספר תרגילים, שהגרסא החלשה הזו (ולכן גם הגרסא המלאה) נובעת מאקסיומת הבחירה.

תרגיל 5.4.10. נניח שאקסיומת הבחירה נכונה, ונניח ש-X מקיימת את הנחות הגרסא החלשה של הלמה של צורן (טענה 5.4.8). הוכיחו שאם ב-X אין איבר מירבי, אז קיימת פונקציה $f : X \to X$ כך שלכל $A \in X$, האיבר $f(A) \in X$ הוא עוקב מיידי של A.

לכן, על-מנת לסיים את הוכחת הלמה של צורן, מספיק להוכיח שהמצב בתרגיל האחרון לא יכול להתקיים. זה נובע מהטענה הבאה (זוהי גרסא קצת מוחלשת של *משפט בורבאקי–וויט*):

טענה 5.4.11. *נניח ש-$\langle X, \preceq\rangle$ קס"ח עם מינימום* 0*, בה לכל שרשרת יש חסם עליון. אז לא קיימת פונקציה $f : X \to X$ כך ש-$f(a)$ הוא עוקב מיידי של a לכל $a \in X$.*

על מנת להוכיח את הטענה, נניח בשלילה ש-X כמו בטענה, ו-$f : X \to X$ כך ש-$f(a)$ עוקב מיידי של a לכל $a \in X$. נאמר שתת-קבוצה $Z \subseteq X$ היא *סגורה* אם:

(א) $0 \in Z$

(ב) לכל $a \in Z$ גם $f(a) \in Z$

(ג) החסם העליון של כל שרשרת שמוכלת ב-Z גם נמצא ב-Z

תרגיל 5.4.12. הוכיחו שקיימת תת-קבוצה סגורה קטנה ביותר Z_0 של X (כלומר, מוכלת בכל תת-קבוצה סגורה אחרת)

תרגיל 5.4.13. נניח ש-$a \in Z_0$ ניתן להשוואה עם כל איבר של Z_0. הוכיחו שתת-הקבוצה $\{b \in Z_0 \mid b \preceq a \vee f(a) \preceq b\}$ היא סגורה. הסיקו שהתנאי מתקיים לכל $b \in Z_0$.

תרגיל 5.4.14. הוכיחו שהקבוצה של כל ה-$a \in Z_0$ שניתנים להשוואה על כל איבר ב-Z_0 היא סגורה. הסיקו ש-Z_0 היא שרשרת, והוכיחו את טענה 5.4.11. הסיקו את הגרסא החלשה של הלמה של צורן.

בהמשך נראה הוכחה נוספת של הלמה של צורן, מתוך טענה אחרת ששקולה לאקסיומת הבחירה, עקרון הסדר הטוב.

נראה כעת שימושים נוספים של הלמה של צורן, לחשבון עוצמות.

טענה 5.4.15. *לכל עוצמה אינסופית α מתקיים $\alpha \cdot \aleph_0 = \alpha$*

נזכיר שעבור עוצמות חיוביות סופיות α אנחנו יודעים ש-$\alpha \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

הוכחה. נבחר קבוצה A כך ש-$|A|$, ונתבונן בקבוצה X שכל איבר שלה הוא קבוצה של תתי-קבוצות זרות של A, שכל אחת מהן בעוצמה $\aleph_0$, סדורה תחת הכלה. ברור שאיחוד של שרשרת של איברי X גם נמצא ב-X, ולכן לפי הלמה של צורן, יש ב-X איבר מירבי P.

כיוון ש-P מירבי, $A \setminus \bigcup P$ סופית, ואפשר להניח שהיא ריקה, כלומר ש-P חלוקה של A, שכל אחד מהתאים שלה הוא מעוצמה $\aleph_0$. לכן, $\alpha = |A| = \aleph_0 \cdot \beta$, כאשר $\beta = |P|$. אבל אז $\aleph_0 \cdot \alpha = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \beta = \aleph_0 \cdot \beta = \alpha$. □

מסקנה 5.4.16. *אם α עוצמה אינסופית ו-β עוצמה כלשהי, אז* $\alpha+\beta=\max(\alpha,\beta)$

הוכחה. נניח ש-$\beta \le \alpha$. אז $\beta+\alpha \le \alpha+\alpha = 2\alpha \le \aleph_0 \cdot \alpha = \alpha$. $\square$

סוף הרצאה 19, 2 ביולי

טענה 5.4.17. *לכל עוצמה אינסופית α מתקיים* $\alpha \cdot \alpha = \alpha$

הוכחה. נבחר קבוצה A כך ש-$|A|=\alpha$. נתבונן בקבוצה X של פונקציות חח"ע $f : B \times B \to B$, כאשר $B \subseteq A$. אם $\mathcal{C}$ שרשרת ב-X, אז $g = \bigcup \mathcal{C}$ גם איבר ב-X: ראינו כבר ש-g היא פונקציה חח"ע. אם $B = \bigcup\{D \mid f : D \times D \to D \in \mathcal{C}\}$, אז $g : B \times B \to B$.

לפי הלמה של צורן, יש ב-X איבר מירבי $f : B \times B \to B$. נסמן $\beta = |B|$. אז f מראה ש-$\beta \cdot \beta = \beta$. אם $\beta = \alpha$ סיימנו, אז נניח ש-$\beta < \alpha$. לכן, לפי מסקנה 5.4.16, $D = A \setminus B$ מעוצמה α. בפרט, $B \precsim D$, ול-D יש תת-קבוצה B' שעצמתה β. אז

$$|(B \times B') \cup (B' \times B) \cup (B' \times B')| = 3\beta \cdot \beta = \beta$$

ולכן יש פונקציה חח"ע $g : (B \times B') \cup (B' \times B) \cup (B' \times B') \to B'$. אז $f \cup g$ היא פונקציה חח"ע מ-$(B \cup B') \times (B \cup B')$ ל-$B \cup B'$, בסתירה למירביות של f. $\square$

הערה 5.4.18. אפשר לקוות ש-B שמצאנו בהוכחה למעשה שווה ל-A. זה לא בהכרח נכון: אם $A = \mathbb{N}$ ו-$B = \mathbb{N} \setminus \{17\}$ אז יש פונקציה הפיכה $f : B \times B \to B$ (משום ששתי הקבוצות מעוצמה $\aleph_0$). הפונקציה הזו היא מירבית ב-X, משום שעל מנת להרחיב אותה ל-$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ צריך לשלוח באופן חח"ע את כל האיברים מהצורה $\langle 17, n\rangle$ או $\langle n, 17\rangle$ ל-$\mathbb{N}$, ויש רק מועמד אחד (17) שעוד לא בתמונה.

מסקנה 5.4.19. *אם α עוצמה אינסופית ו-$\beta > 0$ אז* $\alpha \cdot \beta = \max(\alpha,\beta)$.

לכל עוצמה α, נסמן ב-α^* את העוצמה של A^*, כאשר $|A| = \alpha$ (קל לבדוק שזה לא תלוי ב-A).

מסקנה 5.4.20. *לכל עוצמה אינסופית α מתקיים* $\alpha^* = \alpha$.

תרגיל 5.4.21. הוכיחו את המסקנה

מסקנה 5.4.22. *אם A קבוצה אינסופית, אז* $|\mathcal{F}(A)| = |A|$

תרגיל 5.4.23. הוכיחו את המסקנה

נניח ש-Y קבוצה עם איבר נתון $0 \in Y$ ו-X קבוצה כלשהי. אם $f : X \to Y$ פונקציה, נסמן $\operatorname{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ (*התומך* של הפונקציה f). נסמן ב-$\mathcal{F}(X,Y)$ את קבוצת הפונקציות מ-X ל-Y שהתומך שלהן סופי. התומך

דוגמה 5.4.24. אם $Y = 2 = \{0,1\}$, תחת הזיהוי $\mathcal{P}(X) = 2^X$, הקבוצה $\mathcal{F}(X,2) \subseteq 2^X$ מתאימה לתתי-הקבוצות הסופיות. $\diamondsuit$

מסקנה 5.4.25. *אם X אינסופית וב-Y יותר מאיבר אחד (ואיבר נתון 0), אז* $|\mathcal{F}(X,Y)| = |X| \cdot |Y|$

הוכחה. לכל X, Y כאלה,

$$\mathcal{F}(X,Y)=\bigcup_{X_0\in\mathcal{F}(X)}\{f:X\to Y \mid \operatorname{supp}(f)=X_0\}\sim\bigcup_{X_0\in\mathcal{F}(X)} {Y_-}^{X_0}$$

כאשר $Y_-=Y\setminus\{0\}$. אם Y אינסופית, לכל $X_0\subseteq X$ סופית מתקיים $|{Y_-}^{X_0}|=|Y_-|^{|X_0|}=|Y_-|$ לפי טענה 5.4.17 (ואינדוקציה). כיוון ש-$\mathcal{F}(X)\sim X$, יש לנו איחוד של $|X|$ קבוצות בעוצמה $|Y|$, כלומר קבוצה בעוצמה $|X|\cdot|Y|$. אם Y סופית ובת יותר מאיבר אחד, אז כל קבוצה כזו סופית ולא ריקה, ולכן עוצמת האיחוד היא $|X||Y|=|X|$. □

הלמה של צורן מופיע רבות באלגברה. נשתמש בה עכשיו כדי להוכיח את המשפט המרכזי של האלגברה הלינארית. נזכיר ראשית:

עובדה 5.4.26. *נניח ש-V מרחב וקטורי מעל שדה $\Bbbk$, ו-$B\subseteq V$. אז התנאים הבאים שקולים:*

(א) B מירבית בין הקבוצות הבלתי-תלויות ב-V

(ב) B מזערית בין הקבוצות שפורשות את V

(ג) B בלתי-תלויה ופורשת את V

(ד) לכל פונקציה $f:B\to U$, כאשר U מרחב וקטורי מעל $\Bbbk$, יש הרחבה יחידה להעתקה לינארית מ-V ל-U.

קבוצה B שמקיימת את התנאים הללו נקראת בסיס *ל-V.* בסיס

משפט 5.4.27. *כל קבוצה בלתי-תלויה במרחב וקטורי V ניתן להרחיב לבסיס. בפרט, לכל מרחב וקטורי יש בסיס.*

הוכחה. נסמן ב-X את קבוצת תתי-הקבוצות הבלתי-תלויות ב-V, שמכילות את הקבוצה הנתונה, סדורה על-ידי הכלה. אם $\mathcal{C}$ שרשרת ב-X, אז $A=\bigcup\mathcal{C}$ גם היא בלתי-תלויה: אם $v_1,\dots,v_n\in A$ אז יש איבר $D\in\mathcal{C}$ כך ש-$v_1,\dots,v_n\in D$. לכן, $v_1,\dots,v_n$ בלתי תלויים. לפי הלמה של צורן, יש ב-X איבר מירבי, וכל איבר כזה הוא בסיס. □

הערה 5.4.28. אפשר לנסות להוכיח את הטענה באמצעות קבוצות פורשות במקום קבוצות בלתי-תלויות. נגדיר את X להיות קבוצת הקבוצות הפורשות, סדורה על-ידי הכלה הפוכה (כי מחפשים איבר מינימלי). עלינו להוכיח שכל שרשרת $\mathcal{C}$ חסומה מלמעלה (ביחס להכלה הפוכה!), כלומר שיש קבוצה פורשת A שמוכלת בכל קבוצה ב-$\mathcal{C}$. כל קבוצה כזו בהכרח מוכלת ב-$B=\bigcap\mathcal{C}$, אז אנחנו מצפים ש-$B\in X$. אבל אם למשל $V=\mathbb{Q}=\Bbbk$ (כלומר, $\mathbb{Q}$ כמרחב וקטורי מעל עצמו), ו-$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ פונקציה הפיכה, ו-$B_{i+1}=B_i\setminus\{f(i)\}$ ברקורסיה (ו-$B_0=\mathbb{Q}$), אז $\mathcal{C}=\{B_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ היא שרשרת עבורה $\bigcap\mathcal{C}=\emptyset$. כלומר, ב-$X$ השרשראות הן לא חסומות.

תרגיל 5.4.29. הכלילו את המשפט לטענה הבאה: אם $S\subseteq V$ תת-קבוצה פורשת של מרחב וקטורי V, ו-$I\subseteq S$ תת-קבוצה בלתי-תלויה, אז קיים בסיס B ל-V כך ש-$I\subseteq B\subseteq S$.

טענה 5.4.30. *כל שני בסיסים של מרחב וקטורי V מעל $\Bbbk$ הם מאותה עוצמה.*

המימד
$\dim(V)$

העוצמה של כל בסיס כזה נקראת *המימד* $\dim(V)$ של V.

הוכחה. נניח ש-C בסיס ו-B קבוצה בלתי-תלויה, ונוכיח ש-$|B| \le |C|$. אם C סופית, הטענה כבר מוכרת, אז אפשר להניח ש-C אינסופית. במקרה זה, לפי מסקנה 5.4.22, $\mathcal{F}(C) \sim C$.

כל איבר $b \in B$ אפשר לרשום באופן יחיד כסכום סופי $b = \sum a_i c_i$ כאשר $a_i \in \Bbbk$ ו-$c_i \in C$. נתבונן בפונקציה $t : B \to \mathcal{F}(C)$ שמתאימה לכל איבר $b \in B$ את הוקטורים c_i בהצגה הזו. אם $t(b) = d \in \mathcal{F}(C)$, אז b שייך לתת-המרחב V_d שנפרש על-ידי d. כיוון ש-V_d תת-מרחב ממימד סופי ו-B בלתי-תלויה, הסיב $B_d = \{b \in B \mid t(b) = d\} \subseteq \{b \in B \mid b \in V_d\}$ הוא סופי. לכן, לפי התרגיל הבא, $B \precsim \mathcal{F}(C) \sim C$.

אם B גם היא בסיס, אז לפי אותו נימוק $|C| \le |B|$ וסיימנו. $\square$

תרגיל 5.4.31. הוכיחו שאם $t : B \to D$ פונקציה עם סיבים סופיים (כלומר, לכל $d \in D$ הקבוצה $\{b \in B \mid t(b) = d\}$ היא סופית), ו-D אינסופית, אז $|B| \le |D|$.

מסקנה 5.4.32. *שני מרחבים U, V מעל $\Bbbk$ הם מאותו מימד אם ורק אם קיימת העתקה לינארית הפיכה מ-U ל-V.*

תרגיל 5.4.33. הוכיחו את המסקנה

תרגיל 5.4.34. הוכיח שלכל מרחב וקטורי V ממימד אינסופי מעל שדה $\Bbbk$ מתקיים $|V| = |\Bbbk| \cdot \dim(V)$ (רמז: מסקנה 5.4.25).

הערה 5.4.35. אם $\Bbbk$ שדה ו-B קבוצה כלשהי, לקבוצה $\Bbbk\langle B\rangle := \mathcal{F}(B, \Bbbk)$ יש מבנה טבעי של מרחב וקטורי מעל $\Bbbk$, על-ידי סכום וכפל בסקלר של פונקציות (פעולות אלה שומרות על תומך סופי). הפונקציה $i : B \to \Bbbk\langle B\rangle$ הנתונה על-ידי $i(b) = \{\langle b, 1\rangle\} \cup \{\langle c, 0\rangle \mid c \ne b\}$ (כלומר, $i(b)$ היא הפונקציה המציינת של b) היא חח"ע, ולכן ניתן לזהות את B עם תת-קבוצה של $\Bbbk\langle B\rangle$, וקל לבדוק ש-B בסיס של $\Bbbk\langle B\rangle$. זה מראה שלכל קבוצה B (ולכל שדה $\Bbbk$) קיים מרחב וקטורי שמכיל את B ו-B בסיס בו. למשל, את מרחב הפולינומים במשתנה x מעל $\Bbbk$ אפשר לזהות עם $\Bbbk\langle B\rangle$, כאשר B קבוצת המונומים x^i (ואת B עצמה אפשר לזהות עם $\mathbb{N}$). בפרט, לכל עוצמה α יש מרחב וקטורי מעל $\Bbbk$ שהמימד שלו הוא α.

נשים לב שהמרחב הזה הוא (בכלל) *שונה מהמרחב* $V = \Bbbk^B$ של כל הפונקציות מ-B ל-$\Bbbk$: למשל, אם $|B| \ge |\Bbbk|$ אז $|\Bbbk|\dim(V) = |V| = |\Bbbk|^{|B|}$ כלומר $\dim(V) = |\Bbbk|^{|B|}$.

פונקציה חיבורית

תרגיל 5.4.36. פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ נקראת *פונקציה חיבורית* אם $f(x+y) = f(x) + f(y)$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$. נשים לב ש-$\mathbb{R}$ מרחב לינארי מעל $\mathbb{Q}$. הוכיחו:

(א) כל פונקציה חיבורית היא העתקה לינארית מעל $\mathbb{Q}$

(ב) פונקציה חיבורית f היא רציפה אם ורק אם יש $c \in \mathbb{R}$ כך ש-$f(x) = cx$ לכל $x \in \mathbb{R}$ (במלים אחרות, היא לינארית מעל $\mathbb{R}$)

(ג) קיימת פונקציה חיבורית שאינה רציפה (*רמז:* ביחרו בסיס ל-$\mathbb{R}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$)

סוף הרצאה 20, 3 ביולי

6 סודרים

אנחנו מניחים מעכשיו שקבענו מודל כלשהו M של **ZF** (כלומר, עולם של "קבוצות" שמקיים את האקסיומות), ומדי פעם נניח שהוא מקיים הנחות נוספות, כמו אקסיומת הבחירה. אנחנו מזהים קבוצה x (כלומר איבר של M) עם האוסף $[x]$ של האיברים y של M הקיימים $y \Subset x$, כמו שהוסבר בהערה 5.1.2. נאמר שאוסף מסוים של איברים של M הוא קבוצה אם הוא מהצורה $[x]$ עבור איזשהו איבר x של M. למשל, אוסף המספרים הטבעיים הוא קבוצה (הוא נתון על-ידי $[\omega]$), אבל אוסף כל הקבוצות M אינו קבוצה (טענה 5.1.14). נרשום x במקום $[x]$ ו-$\in$ במקום $\Subset$ וכו'.

6.1 קבוצות סדורות היטב

הגדרה 6.1.1. סדר חלקי $\preceq$ על קבוצה X הוא *נתמך היטב* אם בכל תת-קבוצה לא ריקה של X יש איבר מזערי. נתמך היטב

דוגמה 6.1.2. לכל קבוצה Y, יחס ההכלה על הקבוצה $\mathcal{F}(Y)$ הוא נתמך היטב. אם Y אינסופית, אז $\mathcal{P}(Y)$ לא נתמכת היטב: בקבוצת תתי-הקבוצות האינסופיות אין איבר מזערי. $\diamondsuit$

תרגיל 6.1.3. יחס R על קבוצה X נקרא *יחס טוב* אם לכל תת-קבוצה לא ריקה $A \subseteq X$ קיים $a \in A$ יחיד כך ש-aRb לכל $b \in A$. הוכיחו ש-R יחס טוב אם ורק אם הוא סדר קווי נתמך היטב (במקרה זה, אומרים ש-R הוא *סדר טוב*). יחס טוב סדר טוב

כזכור, עבור קבוצה סדורה $\langle X, \preceq \rangle$ ואיבר $x \in X$, אנחנו מסמנים $X^{\prec x} = \{y \in X \mid y \prec x\}$ ו-$X^{\preceq x} = \{y \in X \mid y \preceq x\}$. הטענה הבאה מראה שניתן להכליל אינדוקציה שלמה לכל קבוצה נתמכת היטב.

טענה 6.1.4. *נניח ש-$\langle X, \preceq \rangle$ קס"ח נתמך היטב. נניח ש-$P \subseteq X$ היא תת-קבוצה המקיימת לכל $x \in X$, אם $X^{\prec x} \subseteq P$ אז $x \in P$. אז $P = X$.*

בהקשר הכללי, טענה זו נקראת *עקרון האינדוקציה הטרנספיניטית*. עקרון האינדוקציה הטרנספיניטית

הוכחה. אחרת, $A = X \setminus P$ לא ריקה, ויש לה איבר מינימלי a. אז $X^{\prec a} \subseteq P$, אבל $a \notin P$, בסתירה להנחה. $\square$

תרגיל 6.1.5. נניח ש-$\langle X, \preceq \rangle$ קס"ח המקיימת את טענה 6.1.4. אז $\preceq$ נתמך היטב.

מעכשיו נתמקד בעיקר בקבוצות סדורות קווית, כלומר קבוצות סדורות היטב. נשים לב שבמצב הזה, x הוא המינימום מבין כל האיברים שחוסמים ממש (מלמעלה) את $X^{\prec x}$.

תרגיל 6.1.6. כל רישא ממש של קבוצה סדורה היטב $\langle X, \preceq \rangle$ היא מהצורה $X^{\prec x}$ עבור איזשהו $x \in X$.

טענה 6.1.7. *אם $\langle X, \preceq \rangle$ סדורה היטב (במודל כלשהו של* **ZF***), אז יש ל-X פונקציית בחירה.*

הוכחה. $c(A) = \min(A)$ לכל $A \subseteq X$ לא ריקה. $\square$

תכונה חשובה של קבוצות סדורות היטב היא שאין להן אוטומורפיזמים (מלבד הזהות), כלומר איזומורפיזמים מהקבוצה לעצמה. זה נובע מהטענה הבאה.

טענה 6.1.8. *נניח ש-$\langle X, \preceq \rangle$ סדורה היטב, ו-$f : X \to X$ עולה ממש. אז לכל $x \in X$ מתקיים $x \preceq f(x)$.*

הוכחה. נסמן $P = \{x \in X \mid x \preceq f(x)\}$, ונניח ש-$X^{\prec x} \subseteq P$. אז לכל $y \prec x$ מתקיים $y \in P$ ולכן $f(x) \prec f(y) \succeq y$. כיוון ש-$x$ הוא האיבר הקטן ביותר שחוסם ממש את $X^{\prec x}$, נובע מזה ש-$x \preceq f(x)$, כלומר $x \in P$. לפי עקרון האינדוקציה, $P = X$. □

מסקנה 6.1.9. *אם $\langle X, \preceq \rangle$ סדורה היטב, ו-$f : X \to X$ איזומורפיזם, אז f היא הזהות. אם $\langle Y, \trianglelefteq \rangle$ קבוצה סדורה ו-$h, g : X \to Y$ איזומורפיזמים, אז $h = g$ (וכמובן Y גם היא סדורה היטב).*

הוכחה. החלק הראשון נובע ישירות מהפעלת הטענה על f ו-f^{-1}. החלק השני נובע מהפעלת החלק הראשון על $g \circ h^{-1}$ ו-$h^{-1} \circ g$. □

הערה 6.1.10. השקילות של שני החלקים של המסקנה האחרונה היא כללית: אוטומורפיזם של אובייקט X הוא איזומורפיזם מ-X לעצמו. הזהות היא תמיד אוטומורפיזם כזה, אבל היא האוטומורפיזם היחיד אם ורק אם לכל אובייקט Y יש לכל היותר איזומורפיזם אחד מ-X ל-Y. אנחנו השתמשנו בזה למקרה שהאובייקטים הם קבוצות סדורות, אבל הטענה נכונה באופן כללי, עם אותה הוכחה.

מסקנה 6.1.11. *קבוצה סדורה היטב לא יכולה להיות איזומורפית לרישא ממש שלה. שתי רישות של אותה קבוצה סדורה היטב הן איזומורפיות אם ורק אם הן שוות.*

תרגיל 6.1.12. הוכיחו את המסקנה

טענה 6.1.13. *אם $\langle X, \preceq \rangle$ ו-$\langle Y, \trianglelefteq \rangle$ קבוצות סדורות היטב, אז X איזומורפית לרישא של Y או Y איזומורפית לרישא של X.*

ההוכחה מזכירה קצת את הלמה של צורן, אבל למעשה אין פה שימוש בה: הטענה נכונה ב-**ZF**.

הוכחה. בתור מוטיבציה, נשים לב שאם הצלחנו, למשל, למצוא איזומורפיזם $f : X \to Y$ לרישא של Y, אז לכל $a \in X$ הצמצום של f לרישא $X^{\prec a}$ הוא איזומורפיזם ל-$Y^{\lhd f(a)}$. כיוון שזהו האיזומורפיזם היחיד בין שתי קבוצות אלה, אפשר לתאר את f כקבוצת כל הזוגות $\langle a, b \rangle$ כך ש-$X^{\prec a}$ איזומורפית ל-$Y^{\lhd b}$.

לכן, ללא ההנחה ש-f קיימת, נגדיר את $f \subseteq X \times Y$ להיות קבוצת הזוגות $\langle x, y \rangle$ כך ש-$X^{\prec x}$ איזומורפית ל-$Y^{\lhd y}$. לפי המסקנה האחרונה, לכל $x \in X$ יש לכל היותר $y \in Y$ יחיד כך ש-$\langle x, y \rangle \in f$, כלומר f היא פונקציה. מאותה סיבה, היא פונקציה עולה ממש. כמו-כן, אם $g : X^{\prec a} \to Y^{\lhd b}$ היא איזומורפיזם, ו-$a' \preceq a$, אז הצמצום של g ל-$X^{\prec a'}$ הוא איזומורפיזם ל-$Y^{\prec g(a')}$, כלומר התחום והתמונה של f הן רישות של X ושל Y, בהתאמה.

אם התחום והתמונה שתיהן רישות ממש, אז יש $a \in X$ ו-$b \in Y$ כך ש-f איזומורפיזם מ-$X^{\prec a}$ ל-$Y^{\lhd b}$, אבל אז לפי הגדרת f, הזוג $\langle a, b \rangle$ היה אמור להיות שייך לשם. לכן התחום או התמונה של f (או שניהם) הם כל הקבוצה. □

סוף הרצאה 21, 8 ביולי

נשים לב שמהמסקנה נובע בפרט שאם X ו-Y קבוצות שיש על כל אחת מהן סדר טוב (כלשהו) אז $X \precsim Y$ או $Y \precsim X$. זו טענה שהוכחנו עבור קבוצות כלליות באמצעות הלמה של צורן (טענה 5.4.5). בצירוף עם טענה 6.1.7, זה מעלה את השאלה: על איזה קבוצות קיים סדר טוב?

עקרון הסדר הטוב

משפט 6.1.14 (משפט צרמלו). *ביחס ל-*$\mathbf{ZF}$, *אקסיומת הבחירה שקולה לעקרון הסדר הטוב: על כל קבוצה קיים סדר טוב.*

זה משפט חשוב, משום שהוא מספק עוד דרך נוחה להשתמש באקסיומת הבחירה: אינדוקציה טרנספיניטית. כיוון אחד של המשפט הוא טענה 6.1.7. על-מנת להוכיח את הכיוון השני, נצטרך לפתח את טכנולוגיית הסודרים.

6.2 סודרים

אם $\langle X, \preceq \rangle$ קבוצה סופית בגודל $n \in \omega$ סדורה בסדר קווי, אז היא איזומורפית על-ידי איזומורפיזם יחיד ל-$\langle n, \subseteq \rangle$ (כאשר משתמשים בהגדרת הטבעיים מסעיף ??). במלים אחרות, יש לנו נציג נתון לכל טיפוס סדר קווי סופי. אנחנו רוצים להכליל את המצב הזה לקבוצות סדורות היטב כלשהן. הנציגים המיוחדים יקראו *סודרים*. התכונות שאנחנו מחפשים דומות לאלה של הטבעיים:

- כל סודר שווה כקבוצה לאוסף כל הסודרים שקטנים ממנו.
- יחס ההכלה על כל סודר הוא סדר טוב עליו.
- כל קבוצה סדורה היטב איזומורפית מאופן יחיד לסודר יחיד (בפרט, כל שני סודרים שונים אינם איזומורפיים)

כמובן שלא ניתן להשתמש בתכונה הראשונה כדי להגדיר את הסודרים, אבל התכונות משמשות כמוטיבציה להגדרה הבאה (של פון-נוימן):

סודר

הגדרה 6.2.1. קבוצה A היא *סודר* אם מתקיימים התנאים הבאים:

(א) $x \subseteq A$ לכל $x \in A$

(ב) לכל $x, y \in A$ בדיוק אחד מהבאים מתקיים: $x \in y$, $y \in x$ או $x = y$

(ג) לכל $B \subseteq A$ לא ריקה יש $x \in B$ כך ש-$x \cap B = \emptyset$.

הסעיף הראשון הוא גרסא מוגבלת של טרנזיטיביות של $\in$, הסעיף השני הוא אנטי-סימטריות, והסעיף השלישי אומר (בהנחה ש-$\in$ אכן סדר חד על A) שהסדר החלש המתאים הוא טוב.

קל לבדוק ש-$\emptyset$ היא סודר. כדי לייצר עוד דוגמאות, נוכיח:

טענה 6.2.2. *אם α סודר אז גם $s(\alpha)$ סודר, שונה מ-α.*

כזכור, $s(x) = x \cup \{x\}$ לכל קבוצה x (הגדרה 5.2.1).

הוכחה. נוכיח ראשית ש-$s(\alpha) \neq \alpha$. זה שקול לטענה ש-$\alpha \notin \alpha$, ולכן נובע מכך ש-α סודר (מהתנאי השני). נוכיח עכשיו ש-$s(\alpha)$ סודר.

(א) נניח ש-$x \in s(\alpha)$. אז $x \in \alpha$ או $x = \alpha$. במקרה הראשון $x \subseteq \alpha \subseteq s(\alpha)$ משום ש-α סודר, ובמקרה השני $x = \alpha \subseteq s(\alpha)$.

(ב) נניח ש-$x, y \in s(\alpha)$. אם $x, y \in \alpha$ הטענה נובעת מכך ש-α סודר, אז אפשר להניח שלפחות אחד מהם, נניח x, הוא α. אז $x = y$ או $x \in y$, ולכן נותר רק להוכיח שהמצבים האחרים לא אפשריים. אם $y \in \alpha$ וגם $y \in \alpha = x$, אז כיוון ש-α סודר, $\alpha \in \alpha$, וראינו כבר שזה לא יתכן.

(ג) נניח ש-$B \subseteq s(\alpha)$ לא ריקה. נסמן $B' = B \cap \alpha$. אם B' ריקה, אז $B = \{\alpha\}$, ו-$\alpha \in B$ מקיימת את הדרישה, משום ש-$\alpha \notin \alpha$. אם B' לא ריקה, אז כיוון ש-α סודר, יש $x \in B'$ כך ש-$x \cap B' = \emptyset$. אז גם $x \cap B = \emptyset$ משום שאחרת, $\alpha \in x \in \alpha$, ושוב מקבלים ש-$\alpha \in \alpha$.

$\square$

מסקנה 6.2.3. *כל מספר טבעי הוא סודר*

טענה 6.2.4. *קבוצת הטבעיים ω היא סודר. היא אינה מהצורה $s(x)$ עבור אף קבוצה x.*

הוכחה. שתי התכונות הראשונות נובעות מטענה 5.2.6, והאחרונה ממשפט 5.2.8. החלק האחרון נובע מכך שלכל קבוצה x מתקיים $x \in s(x)$ ולכל $y \in s(x)$ שאינו x מתקיים $y \in x$ וב-ω אין איבר כזה. $\square$

סודר מהצורה $s(x)$ נקרא *סודר עוקב*, וסודר שאינו כזה ואינו 0 נקרא *סודר גבולי*. לרוב מסמנים סודרים באותיות יווניות, ולכן מסמנים את הטבעיים ב-ω כשחושבים עליהם כסודר. סודר עוקב סודר גבולי

נוכיח עכשיו חלק מהתכונות הרצויות שפירטנו:

טענה 6.2.5. *לכל סודר α:*

(א) כל איבר של α הוא סודר

(ב) לכל $x, y \in \alpha$ מתקיים $x \subseteq y$ אם ורק אם $x = y$ או $x \in y$.

(ג) יחס ההכלה הוא סדר טוב על α

(ד) כל רישא של α (ביחס ל-$\subseteq$) היא סודר.

תרגיל 6.2.6. הוכיחו את הטענה

העובדה שיש לנו סדר טוב על כל סודר מאפשרת לנו להשתמש בכלים והתוצאות שפיתחנו עבור קבוצות כאלה, ובפרט באינדוקציה טרנספיניטית. נשתמש בזה כדי להראות שסודרים שונים אינם איזומורפיים.

טענה 6.2.7. *נניח ש-α, β סודרים.*

(א) אם α ו-β איזומורפיים (כקבוצות סדורות), אז $\alpha = \beta$.

(ב) $\beta \subseteq \alpha$ או $\alpha \subseteq \beta$.

הסעיף השני אומר שהכלה מגדירה סדר קווי על (האוסף של) הסודרים. מעכשיו נרשום גם $\alpha \leq \beta$ במקום $\alpha \subseteq \beta$ (ו-$\alpha < \beta$ במקום $\alpha \in \beta$).

הוכחה. (א) נניח ש-$f : \alpha \to \beta$ איזומורפיזם. נוכיח באינדוקציה על $x \in \alpha$ ש-$f(x) = x$. נניח שלכל $y \in x$ מתקיים $f(y) = y$. כיוון ש-f איזומורפיזם, $f[\alpha^{<x}] = \beta^{<f(x)}$. לפי ההנחה, $f[\alpha^{<x}] = \alpha^{<x} = x$, אז $x = f(x)$. לפי אינדוקציה טרנספיניטית, $f(x) = x$ לכל $x \in \alpha$. כיוון ש-f איזומורפיזם (ובפרט על), $\alpha = \beta$.

(ב) לפי טענה ??, אחד α, β איזומורפי לרישא של השני. לפי טענה ??, הרישא הזו היא סודר, ולכן לפי הסעיף הקודם, האיזומורפיזם הוא הזהות.

□

מסקנה 6.2.8. *אם A קבוצה כלשהי של סודרים, אז $\bigcup A$ סודר.*

מסקנה 6.2.9. *אם $f : \alpha \to \beta$ פונקציה עולה ממש בין סודרים, אז $\alpha \subseteq \beta$ ו-$f(\gamma) \geq \gamma$ לכל $\gamma \in \alpha$.*

תרגיל 6.2.10. הוכיחו את המסקנות.

מסקנה 6.2.11. *אוסף כל הסודרים אינו קבוצה*

הוכחה. נניח בשלילה שאוסף כל הסודרים הוא קבוצה F. אז $\alpha = \bigcup F$ הוא סודר לפי מסקנה 6.2.8, ולכן גם $s(\alpha)$, כלומר $s(\alpha) \in F$. אבל אז $s(\alpha) \leq \alpha$, סתירה. □

משפט 6.2.12. *כל קבוצה סדורה היטב איזומורפית לסודר יחיד.*

הוכחה. היחידות היא טענה 6.2.7. נניח ש-$\langle X, \preceq \rangle$ סדורה היטב. נוכיח ראשית, באינדוקציה על x, שלכל $x \in X$ הרישא $X^{\preceq x}$ איזומורפית לסודר. נניח שהטענה נכונה לכל $y \prec x$, נסמן ב-$f_y : \alpha_y \to X^{\preceq y}$ את האיזומורפיזם היחיד מסודר α_y. אז $F = \{\alpha_y \mid y \prec x\}$ היא קבוצה של סודרים. נגדיר $\alpha = \bigcup F$. לפי מסקנה 6.2.8, α סודר, ומיחידות האיזומורפיזמים, $f = \bigcup \{f_y \mid y \prec x\}$ איזומורפיזם מ-α ל-$X^{\prec x}$. נרחיב את f ל-$s(\alpha)$ על-ידי $f(\alpha) = x$, וסיימנו.

הראינו שלכל $x \in X$ יש איזומורפיזם $f_x : \alpha_x \to X^{\preceq x}$. שוב, מיחידות, אם $y \preceq x$ אז $f_x \restriction_{X^{\preceq y}} = f_y$. לכן, $\bigcup \{f_x \mid x \in X\}$ איזומורפיזם מהסודר $\bigcup \{\alpha_x \mid x \in X\}$ ל-X. □

6.3 רקורסיה טרנספיניטית ועקרון הסדר הטוב

אחת הבניות השימושיות ביותר עבור הטבעיים הייתה משפט ההגדרה ברקורסיה. לבניה הזו יש הכללה לסודרים, שימושית לפחות באותה המידה. כמו עם אינדוקציה, הגרסא שניתן להכליל היא הגרסא ה"שלמה", כלומר מסקנה 3.2.13. לכל קבוצה A ולכל סודר α נסמן $A^{*\alpha}=\{f:\beta\to A \mid \beta<\alpha\}$, כלומר ה"סדרות באורך קטן מ-α" עם ערכים ב-A (אז $A^*=A^{*\omega}$).

משפט 6.3.1 (*משפט ההגדרה ברקורסיה לסודרים*). *לכל סודר α, לכל קבוצה A ולכל פונקציה $t:A^{*\alpha}\to A$ קיימת פונקציה יחידה $f:\alpha\to A$ כך ש-$f(\beta)=t(f\restriction_\beta)$ לכל $\beta\in\alpha$.*

תרגיל 6.3.2. הוכיחו את המשפט (*רמז:* דומה מאוד להוכחת המשפט עבור הטבעיים בסעיף 3.3)

עד כה, כל הדיון על סודרים נעשה ב-**ZF** ולא היה תלוי באקסיומת הבחירה. עכשיו נשתמש במשפט ההגדרה ברקורסיה כדי להוכיח את עקרון הסדר הטוב מתוך אקסיומת הבחירה. הרעיון דומה מאוד להוכחת טענה 4.3.4, כאשר במקום המספרים הטבעיים יש לנו אוסף כל הסודרים: בכל שלב, מרחיבים פונקציה חד-חד-ערכית רקורסיבית לסודר הבא, על-ידי בחירת ערך שאינו בתמונה (באמצעות אקסיומת הבחירה). בניגוד למקרה של הטבעיים, לא ניתן "להמשיך לנצח", משום שאוסף הסודרים אינו קבוצה. לכן, באחד הסודרים הפונקציה שנקבל תהיה על, כלומר נקבל פונקציה הפיכה מסודר לקבוצה הנתונה. בפועל, אין לנו משפט הגדרה ברקורסיה על אוסף כל הסודרים, אז מבצעים אותו תהליך עבור סודר מספיק גדול.

הוכחת משפט 6.1.14. ראינו כבר איך אקסיומת הבחירה נובעת מעקרון הסדר הטוב. נניח עכשיו של-X יש פונקציית בחירה $c:\mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\}\to X$, ונוכיח שקיים סדר טוב על X. נתבונן בקבוצה[5] F של כל הסודרים α עבורם קיימת פונקציה חח"ע $f:\alpha\to X$. כיוון ש-F קבוצה של סודרים, $\beta=\bigcup F$ גם סודר (מסקנה 6.2.8).

נסמן $X_*=X\cup\{*\}$, כאשר $*$ איבר כלשהו שאינו שייך ל-X. נגדיר $g:{X_*}^{*s(\beta)}\to X_*$ על-ידי: $g(t)=c(X\setminus\mathrm{Im}(t))$ אם $\mathrm{Im}(t)\subset X$, ו-$g(t)=*$ אחרת. לפי משפט ההגדרה ברקורסיה קיימת פונקציה $h:s(\beta)\to X_*$ כך ש-$h(\alpha)=g(h\restriction_\alpha)$ לכל $\alpha\leq\beta$. נשים לב שלפי הגדרתה, אם $\mathrm{Im}(h)\subseteq X$ אז h חח"ע (בכל שלב בוחרים איבר שונה מהקודמים, כמו בטענה 4.3.4). אבל אז $s(\beta)\in F\leq\beta$, אז זה לא יתכן.

לכן, קיימת $\alpha\leq\beta$ כך ש-$h(\alpha)=*$. כיוון ש-$s(\beta)$ סודר, קיים α קטן ביותר כזה. אז $h\restriction_\alpha$ חח"ע ועל. אז הסדר על X המוגדרת על-ידי: $x\preceq y$ אם ורק אם $h^{-1}(x)\leq h^{-1}(y)$ הוא סדר טוב (מטיפוס α) על X. □

נסיים את תת-הסעיף עם הערה לגבי עוצמות. הגדרנו את העוצמה של קבוצה באמצעות שקילות קבוצות (כלומר קיום פונקציה הפוכה). זו הגדרה אינטואיטיבית, אך כרוכה בקשיים טכניים. במקרה של עוצמות סופיות, היה נוח מאוד שלכל עוצמה סופית n יש נציג "מיוחד" $\mathbb{N}^{<n}$ (שהוא פשוט הסודר n בסימונים הנוכחיים), ושהם כולם כבר שייכים קבוצה סדורה מוכרת. באמצעות סודרים ניתן להרחיב את המצב הזה לעוצמות כלשהן: לפי עקרון הסדר הטוב, כל קבוצה X שקולה לסודר כלשהו. כיוון שקבוצת הסודרים השקולים ל-X אינה ריקה, יש בה מינימום $\|X\|$. קבוצה

[5] העובדה שקבוצה כזו אכן קיימת נובעת מאקסיומה שלא הזכרנו, אקסיומת ההחלפה

אחרת Y מקיימת $X \sim Y$ אם ורק אם $\|X\| = \|Y\|$. לכן, $\|\cdot\|$ היא העתקה מנה עבור $\sim$, וניתן להשתמש בה בתור העתקת העוצמה:

מונה העוצמה

הגדרה 6.3.3. *מונה* הוא סודר שאינו שקול-עוצמה לאף סודר שקודם לו. לכל קבוצה X, *העוצמה* של X היא הסודר הקטן ביותר ששקול ל-X.

דוגמה 6.3.4. כל סודר סופי הוא מונה, וכך גם $\omega = \aleph_0$. העוקב $s(\omega)$ של ω אינו מונה, משום שהוא שווה עוצמה ל-ω. $\diamondsuit$

אז העוצמה של כל קבוצה היא מונה. ההגדרה הזו אינה עומדת בסתירה להגדרה הקודמת של עוצמה, משום שבהגדרה הקודמת העוצמה הייתה העתקת מנה כלשהי. בפרט, כל מה שאמרנו על עוצמות עדיין תקף. היתרון של ההגדרה הזו, כאמור, הוא שיש לנו תיאור יותר קונקרטי של הקבוצה $|X|$ (מאידך, בהגדרה הזו נדרשת אקסיומת הבחירה על-מנת שלכל קבוצה תהיה עוצמה).

הסדר בין המונים (כלומר, בין העוצמות) הוא הצמצום של הסדר על הסודרים. כיוון שכל קבוצה של מונים היא תת-קבוצה של סודר, בכל תת-קבוצה לא ריקה שלה יש מינימום. בפרט, לכל מונה ישנו המונה העוקב. המונה העוקב של $\aleph_0$ הוא $\aleph_1$, וכן הלאה[6]. השערת הרצף היא ש-$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

תרגיל 6.3.5. הוכיחו שאוסף המונים אינו קבוצה

סוף הרצאה 22, 10 ביולי

העובדה שעל כל קבוצה יש סדר טוב היא מפתיעה, במיוחד במקרים בהם יש כבר סדר אחר על הקבוצה, שרחוק מלהיות סדר טוב, למשל על $\mathbb{R}$. מסתבר שקיומו של סדר טוב הוא לעתים שימושי (בדומה לקיום פונקציה הפיכה מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{Q}$). למשל:

טענה 6.3.6. *הקבוצה $\mathbb{R}^3$ היא איחוד זר של מעגלים*

הוכחה. נבחר פונקציה הפיכה מהמונה $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^3|$ ל-$\mathbb{R}^3$, אותה נסמן ב-$\beta \mapsto x_\beta$, עבור $\beta < |\mathbb{R}|$. נבנה ברקורסיה על β מעגל S_β ב-$\mathbb{R}^3$ כך שלכל $\gamma \le \beta$ מתקיים $S_\beta = S_\gamma$ או S_β זר ל-S_γ, וכך שהנקודה x_β נמצאת על S_β. אם נצליח, אז $\{S_\beta \mid \beta < |\mathbb{R}|\}$ היא הקבוצה שאנחנו מחפשים.

נניח שבנינו את S_γ עבור כל $\gamma < \beta$. אם x_β נמצאת על איזשהו S_γ, נגדיר $S_\beta = S_\gamma$. אחרת, נתבונן על $C = \{S_\gamma \mid \gamma < \beta\}$. עלינו לבנות מעגל ש-$x = x_\beta$ נמצאת עליו, אבל הוא זר לכל המעגלים ב-C. נבחר מישור P שעובר דרך x ולא מכיל אף אחד מהמעגלים ב-C: ניתן לעשות זאת משום שיש $|\mathbb{R}|$ מישורים כאלה, ו-$|C| \le \beta < |\mathbb{R}|$. כל מעגל ב-$C$ חותך את P לכל היותר בשתי נקודות, כלומר יש לכל היותר $2\beta = \beta < |\mathbb{R}|$ נקודות בקבוצה S של נקודות החיתוך של מעגלים ב-C עם P. נבחר נקודה כלשהי $y \ne x$ ב-P, שאינה ב-S. בקבוצה D של מעגלים ב-P שעוברים דרך x ו-y יש $|\mathbb{R}|$ מעגלים, ולכל נקודה $z \in P$ שאינה על הקו l שמחבר את x ל-y מעגל יחיד ב-D. במלים אחרות, יש לנו פונקציה מ-$P \setminus l$ ל-D, והצמצום של הפונקציה הזו ל-S לא יכול להיות על (כי $|S| < |D|$). כל מעגל ב-D שאינו בתמונה עובר דרך x וזר לכל איבר של C. $\square$

בהוכחה השתמשנו בצורה מהותית בעובדה שכל מעגל ב-$\mathbb{R}^3$ מוכל באיזשהו תת-מישור יחיד, ושיש $|\mathbb{R}|$ מישורים כאלה. זה מרמז שאולי הטענה המקבילה עבור $\mathbb{R}^2$ שגויה. זה אכן המצב:

[6] כלומר, רקורסיה טרנספיניטית מייצרת מונה $\aleph_\alpha$ לכל סודר α

תרגיל 6.3.7. הוכיחו ש-$\mathbb{R}^2$ אינו איחוד זר של מעגלים (*רמז:* נבחר מעגל כלשהו, ונקודה x_0 בעיגול שהוא מגדיר, שאינה על המעגל. נקודה זו נמצאת על מעגל יחיד, נבחר נקודה x_1 בתוכו, וכן הלאה. מה אפשר לומר על הסדרה x_i?)

תרגיל 6.3.8. הוכיח שקיימת תת-קבוצה A של $\mathbb{R}^2$ כך שלכל ישר ב-$\mathbb{R}^2$ שייכות בדיוק שתי נקודות מ-A.