יש להגיש את הפתרונות עד יום רביעי בשעה 23:59 בשבוע שאחרי זה בו המטלה ניתנה.

שאלות להגשה

1. קבוצה Γ של נוסחאות (בשפת $\mathbb{PA}$) היא *סגורה תחת כימות חסום* אם לכל נוסחא ϕ ב-Γ, הנוסחאות מהצורה $\exists\bar{x}(x_1+\cdots+x_n=t\wedge\phi)$ אף הן ב-Γ, כאשר t שם עצם סגור, או משתנה שונה מה-x_i. נסמן ב-Σ_0 את הקבוצה הקטנה ביותר של נוסחאות שמכילה את הנוסחאות הבסיסיות, וסגורה תחת שלילה, גימום וכימות חסום.

   נסמן ב-Σ_1 את קבוצת הנוסחאות מהצורה $\exists\bar{x}\phi$, כאשר ϕ ב-Σ_0, וב-Π_1 את הנוסחאות ששלילתן ב-Σ_1.

   נוסחא $\theta(\bar{x})$ נקראת *רקורסיבית* אם קיימות נוסחאות $\phi\in\Sigma_1$ ו-$\psi\in\Pi_1$ שקולות ל-θ, כלומר, כך ש-

$$\mathbb{PA}\models\forall\bar{x}((\theta\leftrightarrow\phi)\wedge(\theta\leftrightarrow\psi))$$

   תת-קבוצה של $\mathbb{N}^m$ היא באחת המחלקות הללו אם ניתן להגדיר אותה באמצעות נוסחא מהמחלקה המתאימה.

   (א) הוכיחו שהעתקת השארית Rem היא ב-Σ_0 (העתקה היא ב-Γ אם הגרף שלה ב-Γ)

   (ב) הוכיחו שאם X ב-Σ_0 (או רקורסיבית), אז קיימת לה קבוצת מלים באותה מחלקה (כלומר, קבוצת מלים $(X^+,|\cdot|,p)$ כאשר כל הרכיבים באותה מחלקה).

   (ג) הוכיחו שאם העתקה היא ב-Σ_1, אז היא רקורסיבית (רמז: אם $f(x)\neq y$ אז $f(x)=y_1$ עבור $y_1\neq y$).

   (ד) הוכיחו שאם f העתקה ב-Σ_1, ו-$\phi(x,y)$ יחס רקורסיבי, אז היחס $\exists y<f(x)(\phi(x,y))$ רקורסיבי אף הוא.

   (ה) בתנאים של משפט הרקורסיה (חלק ראשון), נניח ש-$X=\mathbb{N}$ (לשם הפשטות), ש-A_0 ו-D רקוריסיביים, וגם: קיימת העתקה $b:\mathbb{N}\times X\to\mathbb{N}$ ב-Σ_1 כך שאם $(n,x_1,\dots,x_m,x)\in D$ אז $x_i<b(n,x)$. הוכיחו כי בתנאים אלה, הקבוצה A הנתונה על-ידי משפט הרקורסיה היא רקורסיבית

   (ו) הוכיחו שקבוצת שמות העצם היא רקורסיבית

   (ז) הוכיחו שאם ϕ נוסחא רקורסיבית, אז לכל מודל $\mathcal{M}$ של $\mathbb{PA}$ ולכל מספר טבעי n מתקיים: $n\in\phi^{\mathcal{M}}$ אם ורק אם $n\in\phi^{\mathbb{N}}$

   (ח) הוכיחו שקבוצת הפסוקים הניתנים להוכחה מ-$\mathbb{PA}$ היא ב-Σ_1, אך אינה רקורסיבית

   (ט) הסיקו שלכל פסוק ϕ, אם $\mathbb{PA}\models\phi$ אז $\mathbb{PA}\models\mathbf{P}(\ulcorner\phi\urcorner)$