יש להגיש את הפתרונות עד יום רביעי בשעה 23:59 בשבוע שאחרי זה בו המטלה ניתנה.

שאלות להגשה

1. נסמן ב-$\mathcal{F} = \mathcal{F}(P)$ את קבוצת הפסוקים מעל הקבוצה $P = \{p, q\}$, ונסמן ב-$*$ את הפעולה על קבוצת השלמים $\mathbb{Z}$ המוגדרת על-ידי: $n * m = n - 4m$. תהי $T : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}$ ההעתקה היחידה המקיימת $T(p) = 8$, $T(q) = 3$, $T(0) = 7$, ו-$T(\langle x \to y \rangle) = T(x) * T(y)$ לכל $x, y \in \mathcal{F}$ (כמובטח במשפט 2.2.7 מהרשימות).
   (א) חשבו את $T(p \wedge q)$ (כאשר $p \wedge q$ הוא קיצור ל-$\langle\langle p \to \langle q \to 0 \rangle\rangle \to 0\rangle$).
   (ב) האם קיים פסוק $\phi \in \mathcal{F}$ כך ש-$T(\phi) = 9$? (רמז: שארית בחלוקה ב-4)

2. נניח ש-$\mathcal{B}$ אלגברה בוליאנית. עבור $b \in \mathcal{B}$, נסמן $F_b = \{a \in \mathcal{B} \mid b \leq a\}$.
   (א) הוכיחו ש-F_b מסנן אם ורק אם $b \neq 0$, ושהוא על-מסנן אם ורק אם b אטום (על-מסנן כזה נקרא ראשי)
   (ב) נגיד שאיבר $b \in \mathcal{B}$ הוא *באורך סופי* אם יש אטומים $b_1, \dots, b_k \in B$ כך ש-$b = b_1 \vee \dots \vee b_k$. הוכיחו ש-$\mathcal{B}$ סופית אם ורק אם 1 באורך סופי.
   (ג) הוכיחו שהאלגברה $\mathcal{B}$ היא סופית אם ורק אם כל על-מסנן ב-$\mathcal{B}$ הוא ראשי (רמז: הסתכלו על הקבוצה $F = \{\neg b \mid b$ באורך סופי$\}$)

3. הוכיחו את הכללת טענת היחידות: אם $t_i : X_i \to A$, עבור $i = 1, 2$, הן העתקות מתתי-קבוצות $X_i \subseteq \mathcal{F}(P)$ המקיימות:
   1. אם $\langle \phi \to \psi \rangle \in X_i$, אז $\phi, \psi \in X_i$.
   2. לכל $p \in X_1 \cap X_2 \cap P_0$ מתקיים $t_1(p) = t_2(p)$ (כאשר $P_0 = P \cup \{0\}$)
   3. $t_i(\langle \phi \to \psi \rangle) = t_i(\phi) * t_i(\psi)$ אם $\langle \phi \to \psi \rangle \in X_i$

   אז $t_1(x) = t_2(x)$ לכל $x \in X_1 \cap X_2$.