הרצאה 12: X - יריעה אפינית מעל K, $\partial: K\to K$.
גרסה מוללת של האגד המשיק $T_kX \to X$ עם הצגנו
$T_kX \to Y$ כאשר Y יריעה מעל K אמ״מ
$X\to Y$ גזירה שמתחלפת עם הגזירה של K.
אלגברית, A אלגברת הפונקציות של X, B אלגברת
הפונקציות של Y, $A \to B[\epsilon]$

$$T_kX(B) \Longleftarrow \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B[\epsilon] \\ \uparrow & & \uparrow \\ K & \xrightarrow[x\mapsto x+x'\epsilon]{} & K[\epsilon] \end{array}$$

בפרט: $T_kX(K) \supseteq \{(a,a') \mid a\in X(K)\}$

דוגמא: $K=\mathbb{C}(t)$, $t'=1$, $X: x^2+ty^2=1$

האגד המשיק הרציונלי: $(x_0+x_1\epsilon)^2+t(y_0+y_1\epsilon)^2=1$

$$x_0^2+ty_0^2=1$$

$$2x_0x_1+2y_0y_1t=0$$

x,y פונקציות של t, גזירה של הקודם נותנת:

$$\underline{2x\cdot x'}+y^2+\underline{2tyy'}=0$$

אם הצבנו x_0,y_0 אז מקבלים:

$$\{(x_1,y_1) \mid 2x_0x_1+y_0^2+2ty_0y_1=0\}$$

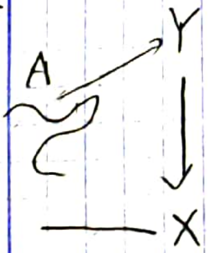
משפט: שדה דיפרנציאלי הוא סגור ישית אמ״מ
(1) K סגור אלגברית.
(2) לכל יריעה אפינית אי פריקה X מעל K ולכל תת

יריעה אפינית $X \subseteq Z$ אי פריקה ודומיננטית מעל K, X, הקבוצה $Z^{\#}=\{a\in X(K) \mid (a)\in Z\}$ לא ריקה.

<u>תזכורת:</u> M סגור ישית אם לכל נוסחה חסרת כמתים $\varphi(x)$ עם פרמטרים ב-M, אם יש ל-φ פתרון בהרחבה של M אז יש פתרון ב-M.

<u>הגדרה:</u> אם X,Y יריעות אפיניות מעל K אז העתקה אלגברית מ-X ל-Y היא דומיננטית אם ההעתקה המתאימה בין האלגבראות היא חח"ע.

<u>טענה:</u> נניח ש-L הרחבה של K (ממ"ז 0), A אלגברה מעל L, $\partial: K\to A$ אז אפשר להרחיב את הגזירה ל-L, באופן יחיד אם L אלגברי מעל K.



מבחינה גאומטרית, אם L חוג הפונקציות של Y ו-K חוג הפונקציות של X

<u>הוכחה:</u> מספיק (הגדרה) להראות זאת למקרה ש-$L=K(t)$ נוצר ע"י איבר אחד בשדה. אם t טרנסצנדנטי מעל K אפשר להגדיר $\partial(t)=0$. אחרת יש ל-t פולינום מינימלי p מעל K, $p(t)=0$. אם $\partial_1: L\to A$ הרחבה של ∂ אז

$$0=\partial_1(p(t))=p^{\partial}(t)+p'(t)\cdot\partial_1(t)$$

הפולינום בו גוזרים את המקדמים

נגזרת כפולינום

$p^{\partial}(t)\in A$

$0\neq p'(t)\in L$ כי p הפולינום המינימלי אז קל $\partial_1(t)=-\frac{p^{\partial}(t)}{p'(t)}$ וגזירה הזאת נותנת את הקיום.

<u>הגדרה:</u> אם X יריעה אפינית מעל שדה K, $S\subseteq X(L)$ איפושהי תת הקבוצה, אז יש תת הקבוצה סגורה מינימלית יחידה מעל K של X שמכילה את S היא נקראת <u>הסגור זריצקי</u> של S. אם $S=\{a\}$ יחידון היא נקראת <u>הלוקוס</u> של a.

<u>הוכחת המשפט:</u> $\Leftarrow$ נניח ש-K סגור ישית. אז צריך להראות ש-(1) ו-(2) נכונים בהרחבה של K. (1) נובע ישירות

מתאימה. נניח ש- X, Z כמו ב-(2), נגדיר $E=k(X)$ שדה העקרים של X. ההכלה של Z ב- τX מתאימה לגזירה מ-E ל-L שמרחיבה את הגזירה של K כאשר $L=k(Z)$ (ההעתקה מ-Z ל-X היא דומיננטית ולכן L הרחבה של E)

לפי (1) עונה אפשר להרחיב את הגזירה לגזירה של L (ומקבלים את הנקודה הגנרית של Z).

בכיוון השני נניח ש-K מקיים את (1) ו-(2) ונניח ש-$\varphi(\bar x)$ נוסחה חסרת כמתים מעל K שיש לה פתרון $\bar a$ בשדה הרחבה דיפרנציאלי L. ע"י הוספת משתנים אפשר להניח שיש רק נגזרת ראשונה:

$$\varphi(\bar x)=\psi(\bar x,\bar x',\bar x^{(2)},\dots,\bar x^{(n)})$$

כאשר ψ בשפה של חוגים. נגדיר משתנים נוספים $\bar y_1,\dots,\bar y_n$ ונוסחה $\psi(\bar x,\bar y_1,\dots,\bar y_n)$ וגם $\bar y_1=\bar x' \wedge \bar y_2=\bar y_1' \wedge\dots\wedge\psi(\bar x,\dots,\bar y_n)$ כך אפשר להניח ש- $n=1$.

ו- $\psi(\bar a,\bar a')$ מתקיים ב- L.

נגדיר $X=$ הלוקוס של $\bar a$ מעל K, Z הלוקוס של $(\bar a,\bar a')$ מעל K. כך X, Z יריעות אי פריקות. ראינו ש $(a,a')\in\tau X(L)$ כך $Z\subseteq\tau X$ ובגלל ש a גנרית ב-X מעל K (כלומר לא מוכלת בשום תת קבוצה סגורה ממש) אז ההעתקה מ-Z ל-X היא דומיננטית.

יש תת יריעה צפופה ב-Z שמוכלת בקבוצת הפתרונות של ψ. אפשר להניח ש-Z מוכלת בקבוצת הפתרונות.

לפי (2) יש נקודה ב- $Z(K)$ מהצורה (c,c'). כלומר $\varphi(c)$ מתקיים ב-K. כ נ ד ר ש

איך זה נראה במערכת אקסיומות:

בהינתן נוסחה $\varphi(\bar x,\bar y)$

$$\forall\bar y\,(\varphi(\bar x,\bar y)\ \text{יריעה אי פריקה}\ X_{\bar y},\ \psi(\bar x_1,\bar x_2,\bar y)\ \xrightarrow[\tau X_{\bar y}\ \text{של}]{\text{תת יריעה אי פריקה}}\ \exists\bar c\,\psi(\bar c,\bar c',\bar y))$$

[$\{\bar y \mid X_{\bar y}\ \text{אי פריקה}\}$ קבוצה גדירה]

Scanned with CamScanner

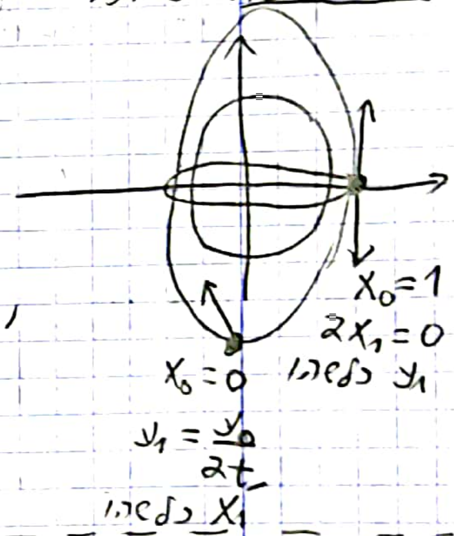
מסקנה: (סוף) לתורה של תחומים דיפרנציאליים יש השלמה מודלית. בפרט האקסיומות הגיאומטריות שקולות לאקסיומות של בלום.

דוגמא: $c: x'=0$ היא תת הקבוצה גדירה.
ראינו שלכל שדה דיפרנציאלי K, $C(K)$ הוא שדה.
אם K הוא שדה סגור דיפרנציאלית אז $C(K)$ סגור אלגברית. כל תתי הקבוצות הגדירות של C^n הן גדירות מן השלמה.
דרך אחת לראות את זה - ניקח $X=\mathbb{A}^1$, $\tau\mathbb{A}^1=\mathbb{A}^2$,
$Z=\{(x,y)|P(x)=0, y=0\}$, אז $(c,c')\in Z^*$ לכן $P(c)=0$, $c'=0$.

הערה 13: נחזור לדוגמא: $x^2+ty^2=1$

הטאנגנט המוזז: $2x_0x_1+2ty_0y_1+y_0^2=0$

$(x(t),y(t))$



טענה: 1) $C_K=\{a\in K|a'=0\}$ שדה הקבועים של שדה סגור דיפרנציאלית K הוא סגור אלגברית.
2) כל תת קבוצה גדירה של C^n היא גדירה בשפה של שדות. (כלומר צירוף לינארי של תתי קבוצות סגורות זריצקי).

הוכחה: 1) לפי האקסיומה, K סגור אלגברית. ידוע $C_K\subseteq K$. ראינו שההרחבה לסגור האלגברי היא יחידה אז הנגזרת של C_K היא 0.
2) חילוץ כמתים נותן שכל קבוצה גדירה ע"י $\varphi(x,x',\ldots,x^{(n)})$ עבור φ בשפת השדות ללא כמתים אבל ב-C $x'=0$.

Scanned with CamScanner

<u>מסקנה</u>: אם K סגור דיפרנציאלית, לכל איבר ב-K יש
לדוגמה – יש תמיד פיתרון למשוואה $x'=a$.

<u>מסקנה</u>: אם X יריעה אפינית מעל K, $s: X\to \tau X$ חתך
רציונלי (כלומר $\pi\circ s = Id_X$) אז הגרף של s הוא דוגמה
ל-Z כמו באקסיומה. במקרה זה האקסיומה אומרת
שיש פיתרון למשוואה $x'=s(x)$.

<u>דוגמה</u>: ניקח מטריצה $n\times n$ מעל K, A, ונסתכל על המשוואה
$x'=Ax$. קבוצת הפתרונות, בכל שדה דיפרנציאלי K, היא
מ"ו מעל C_K ממימד לכל היותר n.
נסתכל על המשוואה $Y'=AY$ כאשר Y מטריצה [illegible]
של משתנים. נסתכל על היריעה $X: \det Y\neq 0 \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$
$\tau X=TX\cong X\times \mathbb{A}^{n^2}$. אפשר לחשוב על $Y_1=AY_0$ כדוגמה
ל-Z מהאקסיומה, ולפי האקסיומה יש פיתרון $B'=AB$
בגלל שהוקטורים בת"ל (הדטרמיננטה שונה מ-0) מימד מרחב
הפתרונות הוא בדיוק n.

<u>בעיה</u>: למצוא פונקציה מרומורפית שמקיימת איזושהי משוואה
דיפרנציאלית ועוד תנאים.....
נשכן את השדה M של פונקציות מרומורפיות בתוך
מודל K של DCF ונעבוד שם. כתוצאה מכך נמצא
פיתרון f לבעיה שנמצא ב-K. השאלה היא איך
לחזור ל-M.

<u>הגדרה</u>. נניח ש-$X\subseteq M^n$ קבוצה גדירה ע"י נוסחה עם
פרמטרים. אז X <u>גדירה מעל $A\subseteq M$</u> אם יש נוסחה כזאת
עם פרמטרים ב-A.
האיבר $b\in M$ הוא <u>גדיר מעל A</u> אם $\{b\}$ גדירה מעל A
<u>הסגור הגדיר</u> של A הוא $dcl(A)=\{b\in M \mid b \text{ גדיר מעל } A\}$

<u>דוגמה</u>: $T=ACF_0$, $M=\mathbb{C}$, $A=\mathbb{Z}\cup\{\sqrt{2}\}$. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]\subseteq dcl(A)$
למשל, $\{\frac{\sqrt{2}}{3}+1\}$ גדירה ע"י $3(x-1)=\sqrt{2}$.
למעשה, ואפילו $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subseteq dcl(A)$. האם זה הכל?
באופן כללי, אם M מודל של ACF, $A\subseteq M$ אז

$K(A) \subseteq dcl(A)$ (שדה הסגור של השדה הנוצר ע"י A)

אם M ממד"ן p, $b\in K(A)$ אז למשוואה $x^n=b$ יש רק פתרון אחד, לכן $b^{\frac{1}{n}}\in dcl(A)$ גם כן.

האם $\sqrt{3}\in dcl(\mathbb{Q})$? לא תקוף $x^2=3$ כי יש שני שורשים.

<u>טענה:</u> בממד"ן 0, $dcl(A)=K(A)$.

<u>אבחנה:</u> אם $X\subseteq M^n$ תת קבוצה גדירה עם פרמטרים ב-A אז כל אוטומורפיזם של M של A שומר על X:

אם σ אוטומורפיזם כזה ו-X גדירה ע"י $\varphi(x,\bar a)$ אז $b\in X$ אמ"מ $\varphi(b,\bar a)$ אמ"מ $\varphi(\sigma(b),\sigma(\bar a))$ אמ"מ $\varphi(\sigma(b),\bar a)$ אמ"מ $\sigma(b)\in X$.

בפרט אם $b\in dcl(A)$ אז $\sigma(b)=b$ לכל σ שמקבע את A.

אם $b\notin K(A)$ אז יש אוטומורפיזם $\mathbb{C}$ המקבע את A אשר מזיז את b.

לכן במקרה הזה, $dcl(A)=\{b\in\mathbb{C} \mid \sigma(b)=b \text{ לכל } \sigma\in Aut(\mathbb{C}/A)\}$.

<u>דוגמא:</u> $M=\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}$, מה זה $dcl(A)$?

<u>תרגיל:</u> $dcl(A)=\{f(\bar a) \mid \bar a\in A^k,\ f \text{ פונקציה גדירה (יקרי הגרף שלה גדיר)}\}$

עבור הדוגמא, נשים לב ש- $\langle A\rangle\subseteq dcl(A)$ (תת שדה של $\mathbb{R}$ שנוצר ע"י A)

אולם נשים לב ש- $\sqrt{2}\in dcl(\mathbb{Q})$: $\sqrt{2}$ מוגדר ע"י הנוסחא $x^2=2\wedge\exists y(y^2=x)$.

נעיר שהמקרים עובדים עם $Aut(\mathbb{R}/\mathbb{Q})=\{Id\}$ לכן,
$\{b \mid \sigma(b)=b\ \forall\sigma\in Aut(\mathbb{R}/\mathbb{Q})\}=\mathbb{R}$

<u>הגדרה:</u> אם T תורה, A קבוצת פרמטרים, <u>טיפוס</u> מעל A במשתנים $\bar x$ הוא קבוצה ספיקה מקסימלית של נוסחאות עם משתנה חופשי $\bar x$ מעל A.

<u>הערה:</u> ספיקה = ספיקה סופית (כל תת קבוצה סופית של נוסחאות היא ספיקה - לפי משפט הקומפ')

<u>דוגמא:</u> $T=ACF$, $A=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, x משתנה יחיד. ב-ACF יש חילוף כמתים. לכן טיפוס p מעל A נקבע ע"י אילו משוואות מהצורה $f(x)=0$ נמצאות ב-p כאשר f פולינום

Scanned with CamScanner

מעל A.

נגדיר $I_p=\{f(x)\in A[x] \mid "f(x)=0"\in p\}$. I_p הוא אידיאל ראשוני.

אז p שקול לנוסחה $f(x)=0$ עבור פולינום אי פריק f או $p=\{f(x)\neq 0 \mid f\in K[x]\}$. באופן יותר כללי, אם X יריעה מעל A, טיפוסים שכוללים את הנוסחה $x\in X$ $\leftrightarrow$ אידיאלים ראשוניים באלגברה של X.

אם M מודל שמכיל את A, $b\in M^n$,
$tp(b/A)=\{\varphi(x) \mid \varphi$ נוסחה מעל A, $\varphi(b)^M=1\}$

אם $\sigma: M\to M$ אוטומורפיזם ששומר את A אז
$tp(\sigma(b)/A)=tp(b/A)$

κ- מונה סופי.

<u>הגדרה</u>: (1) מבנה M הוא <u>κ-הומוגני</u> אם לכל תת קבוצה $A\subseteq M$ כך ש-$|A|<\kappa$ ולכל העתקה אלמנטרית $\sigma: A\to M$ ו-מבנים ולכל $a\in M$ יש הרחבה של σ ל-$A\cup\{a\}$.

(2) מבנה M הוא <u>κ-הומוגני במובן החזק</u> אם לכל $A\subseteq M$ כך ש-$|A|<\kappa$ כל $\sigma: A\to M$ אפשר להרחיב לאוטומורפיזם $\tilde{\sigma}: M\to M$.

(3) (תזכורת) M הוא κ-רווי אם לכל $A\subseteq M$ כך ש-$|A|<\kappa$, כל טיפוס מעל A מתממש ב-M.

<u>טענה</u>: אם M κ-רווי אז הוא κ-הומוגני.

<u>הוכחה</u>: ניקח $A\subseteq M$ כך ש-$|A|<\kappa$, $\sigma: A\to M$, $a\in M$. נסמן $A'=\sigma(A)$ אז $\{\varphi(x,\sigma(b)) \mid \varphi(x,b)\in tp(a/A)\}$ טיפוס מעל A' ולכן לפי רוויה יש a' שמממש את p ונגדיר $\sigma(a)=a'$.

<u>הערה</u>: אם $|M|=\kappa$ אז M הוא κ-הומוגני אמ"מ הוא κ-הומוגני במובן החזק.

<u>הגדרה</u>: M הוא מודל רווי אם הוא κ-רווי כאשר $\kappa=|M|$.
באופן כללי קיום של מודלים רוויים שקול להנחה אי-כריעה מתורת הקבוצות.

אנחנו נניח כי יש מודל רווי מספיק גדול כרצוננו.

Scanned with CamScanner

מודל ה[illegible] הון האנושי במובן הרחב.

Scanned with CamScanner