הרצאה 10

אנחנו רוצים להוכיח שב- DCF יש חילוץ כמתים.

הגדרה: אם M מבנה, Γ קבוצת נוסחאות, אז Γ **ספיקה סופית** ב-M אם כל תת קבוצה סופית שלה היא ספיקה.

ראינו שאם M איזשהו מבנה אז $T_{(M)}$ זאת התורה של הרחבות אלמנטריות של M. אם Γ ספיקה סופית ב-M אז כל תת קבוצה סופית של $T_{(M)}\cup\Gamma$ היא ספיקה ולכן לפי משפט הקומפקטיות, גם $T_{(M)}\cup\Gamma$ ספיקה.

דוגמא: $M=\mathbb{Q}^a$ (הסגור האלגברי של $\mathbb{Q}$), $\Gamma=\{P(x)\neq 0 \mid P$ פולינום מעל $\mathbb{Q}\}$. אז Γ ספיקה סופית ב-M, אבל לא ספיקה ב-M כי כל איבר ב-M הוא שורש של פולינום. אבל ב-$\mathbb{C}$, Γ ספיקה.

הערה: אפשר למצוא הרחבה אלמנטרית כזו מעוצמה $|M|$ (לפי משפט לוונהיים סקולם היורד).

הגדרה: נניח ש-κ עוצמה. M נקרא מבנה κ-רווי אם לכל תת קבוצה $A\subseteq M$ מעוצמה קטנה מ-κ וכל קבוצה ספיקה סופית Γ של נוסחאות עם פרמטרים ב-A היא ספיקה ב-M.

דוגמא: $\mathbb{C}$ מודל $\aleph_1$-רווי של ACF.

טענה: לכל מבנה M ולכל κ יש הרחבה אלמנטרית κ-רוויה.

דוגמא: נניח ש-L_0 שדה דיפרנציאלי ו-$L_0\subseteq E$, E שדה סגור דיפרנציאלית. נניח ש-P פולינום דיפרנציאלי מסדר n מעל L_0 אז יש הרחבה אלמנטרית של E, E_1, שהיא מספיק רוויה ובה יש איבר a כך ש-$P(a)=0$ ו-$q(a)\neq 0$ לכל פולינום דיפרנציאלי q מעל L_0 מסדר $<n$.

קריטריון לחילוץ כמתים: $\exists y\varphi(x,y)$ שקולה לנוסחה חסרת כמתים $\psi(x)$ אמ"מ לכל מודל M ולכל $a\in M$ אם $\exists y\varphi(a,y)$ ספיקה ב-M אז היא ספיקה בכל מודל N שמכיל את a.

כלומר, $N\models\exists y\,\varphi(a,y) \iff N_1\models\exists y\,\varphi(a,y)$, N_1 הרחבה אלמנטרית של N.

הוכחה של חילוץ כמתים ב-DCF: נשתמש בקריטריון $\exists y\varphi(x,y)$

ד.י.א מהנחה $p_1(a,y)=\dots=p_m(a,y)=0$ ועם $q(a,y)\neq 0$.
נניח שהמערכת פתירה באיזשהו $a\in L$ וניקח מודל
E של DCF אפשר להניח ש- E $\aleph_1$-רווי ולפחות כמו
בדוגמא עבור $L_0=\mathbb{Q}\{a\}$.
נסתכל על $I=\{p\in L_0\{x\} \mid p(a)=0\}$. זה אידיאל
דיפרנציאלי שהוא גם ראשוני, אז יש $f\in I$ מסדר
ודרגה מינימלית כך ש- $I=I(f)$. נסמן ב- n את
הסדר של f. לפי דוגמא (#) יש $c\in E$ כך ש- $f(c)=0$
ו- $g(c)\neq 0$ עבור g מסדר יותר נמוך.
כפולינום ב- $x^{(n)}$ מעל $c^{(i)}$ עבור $i<n$ הוא אי פריק,
כי אלגברית, ה- $c^{(i)}$ בלתי תלויים. לכן $c^{(n)}$ לא
שורש של אף פולינום מעל $L_0(c,c',\dots,c^{(n-1)})$ מדרגה
יותר נמוכה.

בפרט $S_f(c)\neq 0$. כיוון ש- $p_i\in I(f)$, יש m_i כך
ש- $S_f^{m_i}\cdot p_i\in\langle f\rangle$ לכן $S_f^{m_i}(c)\cdot p_i(c)=0$ לכן
$S_f\neq 0$ לכן $p_i(c)=0$.

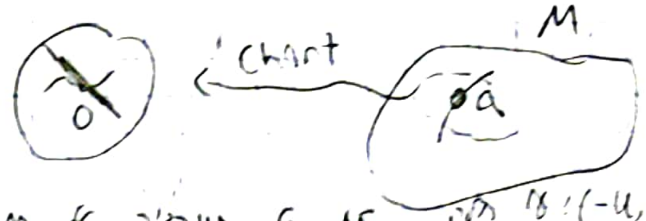
לפי חלוקה עם שארית יש איזשהו $e,r\in\mathbb{N}$
q,g יותר נמוכים מ- f כך ש- $a^e\cdot S_f^r\cdot q-g\in\langle f\rangle$ וחייב להיות
ש- $q(c)\neq 0$ כ נ ד ר ש.

מסקנה: DCF היא ההשלמה המודלית של DD והיא
תורה שלמה. ($\mathbb{Q}$ תת מבנה משותף לכל המודלים)

דוגמא: $x^2+y^2=1$, $x'=x$, $y'=y$
למערכת זאת אין פיתרון.
$(x^2+y^2=1)'$
$\cancel{2}xx'+\cancel{2}yy'=0$
$x^2+y^2=0 \to 0=1$ סתירה.
מערכת זאת לא ניתן לפתור באף שדה דיפרנציאלי.
גאומטרית, המשוואה $x^2+y^2=1$ מתארת חלקיק של
על המסלול, והמשוואה $xx'+yy'=0$ אומרת
שהנגזרת מאונכת לרדיוס, ומשיקה למסלול.

יריעה דיפרנציאלית:

לכל $v\in\mathbb{R}^n$ אפשר לייצג העתקה $\partial_v:A\to\mathbb{R}$ כאשר A הוא חוג הפונקציות החלקות על הכדור הפתוח B סביב 0 ב-$\mathbb{R}^n$.



$\gamma:(-u,u)\to M$ מסילה, $\gamma(0)=a$

אם f פונקציה על M, $f\circ\gamma:(-u,u)\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה

∂_v היא לינארית מעל $\mathbb{R}$ ומקיימת את כלל לייבניץ:
$\partial_v(f\cdot g)=\partial_v(f)g(0)+f(0)\partial_v(g)$ (זה היא גזירה ב-0)
להיפך כל גזירה ב-0 היא מהצורה של עבור v יחיד.

אם ∂ גזירה ב-0, נגדיר $v=(\partial(x_1),\dots,\partial(x_n))$
(אם f חלקה בסביבה של 0 ו-$f(0)=0$ אז יש g חלקה בסביבה של 0 כך ש-$f=xg$).

הגדרה: אם M יריעה דיפרנציאלית, $a\in M$, וקטור משיק ב-a זאת גזירה $\partial:A\to\mathbb{R}$ בנקודה a. (A הפונקציות החלקות על M)
אוסף כל הווקטורים המשיקים ב-a הוא מ"ו שנקרא המרחב המשיק.

הגדרה: אם M יריעה אלגברית, $a\in M$ וקטור משיק ב-a זה גזירה $\partial:A\to k$ בנקודה a (A פונקציות אלגבריות על M).

אם $\langle A,X\rangle$ יריעה אפינית, אפשר לזהות את X עם הקבוצה $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A,k)$, אם A אלגברה מעל k, קבוצת הנקודות שלה ב-k היא $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A,k)$. באופן יותר כללי הנקודות ב-B (איזושהי אלגברה מעל k) היא הקבוצה $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(A,B)$. אם $\langle B,Y\rangle$ גם יריעה אלגברית אז $X(B)\Leftrightarrow$ העתקות של יריעות אלגבריות מ-Y ל-X.

$\langle A,X\rangle$ יריעה אפינית, $x\in X$ (קרי $x:A\to k$). גזירה ב-x זאת העתקה לינארית $\partial:A\to k$ כך ש-
$\partial(ab)=\partial(a)x(b)+x(a)\partial(b)$, היא וקטור משיק ב-$x$.

תיאור אלגברי נוסף — נגדיר $E=k[\varepsilon]=k[t]/t^2$, בהינתן נקודה $x\in X$ וקטור משיק ב-x לכן יכול לפתח העתקה

של אלגברות מעל k $d: A \to E$!

בהינתן 2 כאלות, $x: A \to k$ והמתאי' היא $x(a) = \overline{d(a)}$ (כשמש $\bar{a} = \overline{a_1 + a_2\varepsilon}$) ו- $\partial(a) =$ המקדם של ε ב-$d(a)$

קיום השני: אם $x: A \to k$ נקודה, $\partial: A \to k$ והטור משיק אז $d(a) = x(a) + \partial(a)\varepsilon$ העתקה של אלגברות.

הרצאה 11

אנחנו מדברים על יריעות אפיניות $\langle A, X \rangle$ כך ש-X קבוצה ו-A אלגברת פונקציות נוצרת סופית מעל k כך ש-X ניתנת לשחזור מ-A.

לכל אלגברה A מעל k נסמן ב-$Spec(A)$ את "המרחב המתאים ל-A".

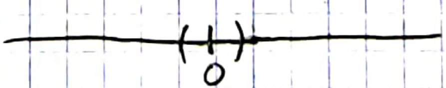
הנקודות של $Spec(A)$ בקואורד' אלגברה B מעל k הן פשוט העתקות של אלגבראות מ-A ל-B. נסמן את כל הנקודות ב-B ב-$X(B)$

סכמה אפינית מעל k יהיה מרחב מהצורה $Spec A$.

ראינו אתמול - אם $X = Spec A$, לתת B - נקודה p של X ביחד עם וקטור משיק v ב-p זה כמו לתת העתקה של חוגים $A \to B[\varepsilon]$:

אם $p: A \to B$ נקודה, $v: A \to B$ היא גזירה ביחס ל-p אז $d: A \to B[\varepsilon]$ מוגדר ע"י $d(a) = p(a) + v(a)\varepsilon$ אם $d: A \to B[\varepsilon]$ נתונה ע"י $d(a) = p(a) + v(a)\varepsilon$ לכל a אז $p: A \to B$ העתקה של אלגברות ו- $v: A \to B$ גזירה ביחס ל-p.

הערה: איך לתאר את $Spec(k[\varepsilon])$? נקודה + וקטור משיק



$k[x]$

$$k = k[x]/x$$

המטרה: להגדיר את האובייקט המשיק ל-X (tangent bundle) "מרחב" TX שהנקודות בו הן הוקטורים המשיקים לנקודות ב-X.

רוצים: $Y \to TX$

$\Updownarrow$

$Y \xrightarrow{p} X$, $V_y: A \to k$ לכל $y \in Y$

וקטור משיק ...

לכל אלגברה B, רוצים $(TX)(B) \xrightarrow{\sim} X(B[\epsilon])$ פונקטוריאלית ב-B:
אם $f: B' \to B$ העתקה של אלגברות אז

$$\begin{tikzcd}
(TX)(B) \arrow[r, "\sim"] & X(B[\epsilon]) \\
(TX)(B') \arrow[r, "\sim"] \arrow[u] & X(B'[\epsilon]) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

קומוטטיבית.

האובייקט המייצג TX הוא המרחב TX שמקיים זאת.

כלומר, נגדיר את TX; אם $TX = \mathrm{Spec}(C)$ עבור $B=C$,
$TX(B) = \{C \to B\}$, $TX(C) \ni \{C \to C\}$.

$$\begin{tikzcd}
1_C \in TX(C) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & X(C[\epsilon]) \\
f \in (TX)'(C) \arrow[ur]
\end{tikzcd}$$

f היא איזומורפיזם.

<u>דוגמא:</u> $\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(k[x_1, \dots, x_n])$.

$$T\mathbb{A}^n(B) = \mathbb{A}^n(B[\epsilon]) = \{\langle b_1 + c_1\epsilon, b_2 + c_2\epsilon, \dots, b_n + c_n\epsilon \rangle \mid b_i, c_i \in B\}$$
$$\cong \{\langle b_1, \dots, b_n \rangle \mid b_i \in B\} \times \{\langle c_1, \dots, c_n \rangle \mid c_i \in B\}$$
$$= \mathbb{A}^n(B) \times \mathbb{A}^n(B) = \mathbb{A}^{2n}(B)$$

אם $Y \subseteq X$ תת יריעה סגורה, הרי Y מתאימה להעתקה $A \twoheadrightarrow B$ של אלגבראות כאשר $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ עם גרעין I שמורכב מהפולינומים שמגדירים את Y בתוך X.

לכן $TY \subseteq TX$ - מספיק לבדוק ש- $TY(B) \subseteq TX(B)$ וזה אמת.
$Y(B[\epsilon]) \subseteq X(B[\epsilon])$ וזה נכון כי $Y \subseteq X$.

אם $y \in Y(k)$ נקודה, הווקטורים המשיקים ל-y ב-X הם נגזרות $v: A \to k$ ביחס ל-y. v משיק ל-y אמ"מ $v = v_0 \circ \pi$. אמ"מ $v(f) = 0$ לכל $f \in I$.

דוגמה: $X = \mathbb{A}^2$
$Y = \left\{ \begin{matrix} f = 0 \\ f = x^2 + y^2 - 1 \end{matrix} \right\} = Y = $ y

$Y(B[\epsilon]) = \{ y \in X(B[\epsilon]) \mid f(y) = 0$ לכל $f \in I \}$

בדוגמא:
$(a_1 + a_2\epsilon)^2 + (b_1 + b_2\epsilon)^2 = 1$
$a_1^2 + 2a_1a_2\epsilon + b_1^2 + 2b_1b_2\epsilon = 1$
$a_1^2 + b^2 = 1$
$2a_1a_2 + 2b_1b_2 = 0$

קיום האגד המשיק: $X = \mathrm{Spec}(A)$. מחפשים אלגברה C
כך ש- $TX = \mathrm{Spec}(C)$. כלומר, C צריכה לקיים

$$C \to B \iff A \to B[\epsilon]$$
$$TX(B) \qquad X(B[\epsilon])$$

נשים לב כי $B[\epsilon]=B\otimes_k k[\epsilon]$. נסמן $E=k[\epsilon]$. מחפשים

אלגברה C כך ש- $C\to B \iff A\to B\otimes E$

<u>משפט</u>: (Weil restriction, דוגמאות, קולרים, המשמעות מגנ')

לכל אלגברה E מעל k שהיא נוצרת סופית

כמו"ן מעל k, ולכל אלגברה A מעל k יש

אלגברה C_A מעל k והתאמה קנונית $C_A\to B$

אמ"מ $A\to B\otimes_k E$ לכל אלגברה B.

<u>סקיצה של ההוכחה</u>: במרחבים וקטוריים, $Hom(E,A)\to B$

$$\Updownarrow$$
$$A\to B\otimes E \iff E^*\otimes A\to B$$

$$m: A\otimes A\to A$$
$$n: E\otimes E\to E$$

$$V \xleftarrow{m\circ\varphi} U \quad \varphi \longmapsfrom \psi \qquad = Hom(E, A\otimes A)$$
$$\downarrow$$
$$Hom(E\otimes E, A\otimes A)$$
$$\wr\!\wr$$
$$Hom(E,A)\otimes Hom(E,A)$$
$$\|$$
$$V\otimes V$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"] & V \arrow[r] & B \\
V\otimes V \arrow[rr] & & B\otimes B \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$Hom(E,k) = V_0\subseteq V$$

$$\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[r, "\psi\mapsto\psi(1)"] \arrow[d] & k \arrow[d] \\
V \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

$$sym(V)=\bigoplus_{i=0}^{\infty} \cancel{V\otimes V\otimes\ldots\otimes V}/S_n \qquad C_A = Sym(V)\Big/\substack{t(u)-s(u)=0 \\ \text{לכל } u\in U}$$

<u>תרגילים</u>: 1) $E=k\times k$ 2) E הרחבת גלואה סופית של k.

3) E הרחבת שדות אי פרידה לחלוטין.

4) $E=k[\epsilon]$ ($C_A=Sym_A(\Omega_{A/k} A)$)

— — — — — — — — — — —

נניח ש- k שדה דיפרנציאלי. לה גזירה להעתקה

$K\to k[\epsilon]$. $C_k=\{a\in k \mid a'=0\}$ הוא תת שדה.

נניח ש- X יריעה אפינית מעל C_k ו- $a\in X(k)$.

$B\to k\to k[\epsilon]$ נותן נקודה $\tilde{a}\in X(k[\epsilon])=TX(k)$.

באופן כללי אם X יריעה אפינית מעל k (ולא C_k)

נקודה:

$$\begin{tikzcd} \xi \arrow[r] \arrow[d, no head] & k \arrow[r] & k[\varepsilon] \arrow[d, equal] \\ k \arrow[rru] \arrow[rr] & & k[\varepsilon] \end{tikzcd}$$

נקודה $q \in X(k)$ נתונה נקודה ל- $TX(k)$ כאשר

TX מתקבל כמו TX אבל ביחס לטופולוגיה: $E = k[\varepsilon]$

שנתון ע"י $K \to E$, $\varepsilon \cdot \varepsilon' + \varepsilon \longmapsto \varepsilon$.

ל- TX עדיין יש העתקה ל- X, מעל נקודה $x \in X(K)$

ישנן פונקציות $u : A \to K$ המקיימות $u(cf) = c' f(x) + c\, u(f)$

לכל $c \in K$, $f \in A$,

אם $v \in T_x$ אזי $u + v \in T_x X$