הרצאה 8: הגדרה: תורה T_1 נקראת עמיתה של תורה T_2 אם $T_{1\forall} = T_{2\forall}$.

ראינו: אם D התורה של תחומי שלמות, ACF התורה של שדות סגורים אלגבריים אז 1) $D_\forall = ACF_\forall$ – כל מודל של ACF הוא מודל של D וכל מודל של D אפשר להרחיב למודל של ACF.

2) ב-ACF יש חילוץ כמתים.

הגדרה: T היא השלמה מודלית של T_0 אם T עמיתה של T_0 ו-T מחלצת כמתים.

ראינו: כל מודל של ACF הוא סגור קיומית: לכל מודל של ACF אם M מודל ו-$\varphi(x,y)$ נוסחה חסרת כמתים אם $\varphi(x,m)$ ספיקה בהרחבה של M אז היא ספיקה ב-M.

$\varphi(x)$ נוסחא, $M \subseteq N$ מודלים של T. אז $\varphi(N), \varphi(M)$

קבוצות שונות בדוגמא: $\varphi: \neg\exists y(y^2=x)$

אם $N=\mathbb{C}$, $M=\mathbb{Q}$ אז $2\in\varphi(M)$ $2\notin\varphi(N)$

דוגמא: השפה של חבורות חילופיות, $M=\mathbb{Z}$, $T=T(\mathbb{Z})$.

$x=$ $\varphi(x)=\exists y(y+y=x)$. אז $1\in\mathbb{Z}$ ו- $1\notin\varphi(\mathbb{Z})$.

ניקח $N=\frac{1}{2}\mathbb{Z}=\{\frac{n}{2}\in\mathbb{Q} \mid n\in\mathbb{Z}\}$. אז $M\subseteq N$ ו- $T(M)=T(N)$

כי המבנים הם איזומורפים אבל $1\in\varphi(N)$

אבל - אם $\varphi=\exists_y\psi(x,y)$ כאשר ψ חסרת כמתים אז $\varphi(M)\subseteq\varphi(N)$

ויתכן ש- $\varphi(M)\subsetneq\varphi(N)\cap M$.

באותו אופן, אם $\varphi=\forall_y\psi(x,y)$ כאשר ψ חסרת

כמתים אז $\varphi(N)\cap M\subseteq\varphi(M)$ וייתכן שההכלה תהיה

ממש.

<u>הגדרה:</u> אם M תת מבנה של N, אז M נקרא

<u>תת מבנה אלמנטרי</u> אם לכל נוסחא $\varphi(x)$ $\varphi(M)=\varphi(N)\cap M$

<u>טענה:</u> נניח ש- $\varphi(x)$ נוסחא. הטענות הבאות שקולות.

(א) φ ישית $\varphi(x)\overset{*}{\equiv}\exists_y\psi(x,y)$, ψ חסרת כמתים

(ב) לכל שני מודלים $M\subseteq N$ $\varphi(M)\subseteq\varphi(N)\cap M$

(*) כלומר, $T\vDash\forall x(\varphi(x)\leftrightarrow\exists_y\psi(x,y))$.

<u>הוכחה:</u> ראינו ש-א גורר ב.

<u>ב $\Rightarrow$ א:</u> נסתכל על הקבוצה $\Gamma=\left\{\theta(x) \,\middle|\, \begin{array}{l}\theta(x) \text{ יישית} \\ T\vDash\forall x(\theta(x)\to\varphi(x))\end{array}\right\}$

אם φ לא שקולה לנוסחא ב- Γ אז לפי קומפקטיות,

יש מודל M של T ואיבר $m\in M$ כך ש- $m\in\varphi(M)$

אבל $m\notin\theta(M)$ לכל $\theta\in\Gamma$.

נטען כי $T_1=T_M\cup\{\neg\varphi(m)\}$ היא תורה עקבית. בהינתן

זאת, ניקח מודל N של T_1. אז N מודל של T שמכיל

את M אבל $m\notin\varphi(N)$ בסתירה להנחה (ב).

ובכן, אם T_1 לא עקבית, לפי משפט הקומפקטיות יש

נוסחא חסרת כמתים $\alpha(x,y)$ ואיבר $m_1\in M$ כך

ש- $T\cup\{\alpha(m,m_1), \neg\varphi(m)\}$ לא עקבית. [illegible]

$T \vdash \forall m \exists n (\varphi(n,m) \to \psi(m))$ אז $\exists y\, \varphi(y,x) \in T$.

אבל $\varphi(n,m)$ נכון ב-M לכל בחירה של m - סתירה.

<u>מסקנה</u>: התנאים הבאים שקולים

א) φ שקולה לנוסחה כוללת

ב) לכל שני מודלים $M \subseteq N$, $M \cap \varphi(N) \subseteq \varphi(M)$.

<u>בפרט</u>: $\varphi(M) = M \cap \varphi(N)$ לכל $M \subseteq N$ אם φ שקולה גם לנוסחה ישית וגם לנוסחה כוללת.

<u>דוגמה</u>: ייתכן ש-φ שקולה לנוסחה ישית וגם לנוסחה כוללת, בלי להיות חסרת כמתים. לדוגמא T התורה של הממשיים כשדה. האיברים האי-שליליים מוגדרים ע"י הנוסחה הישית $\exists y (x = y^2)$ וע"י הנוסחה הכוללת $\forall y (y^2 \neq -x) \vee x = 0$

<u>משפט</u>: התנאים הבאים של תורה T שקולים:

1) T היא [illegible] התורה של מודלים סגורים ישית של $T_\forall$

2) כל המודלים של T הם סגורים ישית (במודלים של T)

3) כל נוסחה שקולה, ביחס ל-T, לנוסחה ישית. (שקול לכך שכל נוסחה שקולה לנוסחה כוללת)

4) לכל מודל M של T התורה T_M היא שלמה.

5) כל הכלה של מודלים של T היא הכלה אלמנטרית.

<u>הגדרה</u>: T שמקיימת את התכונות הללו נקראת <u>שלמה מודלית</u>.

2) T נקראת <u>עמיתה מודלית</u> של T_0 אם היא עמיתה של T_0 ושלמה מודלית.

<u>הוכחת המשפט</u>: $1 \Rightarrow 2$: טריוויאלי.

$2 \Rightarrow 3$: מספיק להראות שכל נוסחה כוללת שקולה לנוסחה ישית. נסתכל על $\forall x\, \varphi(x,y)$. לפי טענה קודמת מספיק להוכיח שלכל $M \subseteq N$ מודלים של T $\varphi(M) \subseteq \varphi(N) \cap M$. ניקח $m \in \varphi(M)$ ונניח ש-$m \notin \varphi(N)$ אז $m \in \neg\varphi(N)$ כי ב-N קיים n כך ש-$\neg\psi(m,n)$ אבל M סגור ישית אז יש $m_0 \in M$ כך ש-$\neg\psi(m, m_0)$ נכונה ב-M בסתירה לכך ש-$\forall y\, \psi(m,y)$ נכונה ב-M.

(3) $\Leftarrow$ (4) תרגיל

(3) $\Rightarrow$ (5) כל נוסחה שקולה לי"ית וכולם עם התנאי לבדיקה אלמנטרית מתקיים.

(5) $\Rightarrow$ (2) תרגיל

נשאר להוכיח (5) $\Rightarrow$ (1). נניח את (5). צריך להוכיח שאם M מודל סגור י"ית של $T_\forall$ אז הוא מודל של T.

נזכיר ראשית ש-M מודל של $T_{\forall\exists}$ = כל הפסוקים מהצורה $\forall\bar{x}\exists\bar{y}\varphi$ ב-T (φ חסרת כמתים). כלומר צריך להוכיח שאם $\bar{m}\in M$ אז $\exists\bar{y}\varphi(\bar{m},\bar{y})$ מתקיים ב-M. בגלל ש-M סגור י"ית מספיק להראות שיש הרחבה N של M ו-$\bar{n}\in N$ כך ש-$\varphi(\bar{m},\bar{n})$ מתקיים ב-N. M מודל של $T_\forall$ אז יש מודל N של T שמרחיב את M וזה הפסוק מתקיים כי הוא שייך של T. לכן מספיק להראות שאם (5) נכון אז $T_{\forall\exists}=T$. נניח ש-$\emptyset\neq C$ קבוצה של מודלים שסגורה הווית תחת הכלה. ל-$M'=\bigcup C$ יש מבנה יחיד של מבנה לפי ספה עם התנאי שכל הכלה $M\subseteq M'$ עבור $M\in C$ הוא הומומורפיזם:

<u>דוגמא:</u> $\mathbb{Z}$ כקבוצה סדורה, $T=T_h(\mathbb{Z},\leq)$. נגדיר $M_i:=\frac{1}{2^i}\mathbb{Z}$. אז M_i תת מבנה של M_j עבור $j\geq i$. כולם איזומורפים אז הם מודלים של T. אבל האיחוד לא מודל של T: ב-T מתקיים $\forall x\exists y(x<y\wedge\forall z(z\leq x\vee y\leq z))$

<u>טענה:</u> התה"ש: (1) $T=T_{\forall\exists}$

(2) לכל שרשרת C של מודלים של T, $\bigcup C$ גם מודל של T.

<u>הערה 9:</u> היינו באמצע להוכיח שאם כל הכלה של מודלים של T היא אלמנטרית (5) אז כל מודל סגור י"ית של $T_\forall$ הוא מודל של T (1). באופן כללי ראינו שכל מודל סגור י"ית של $T_\forall$ הוא מודל של $T_{\forall\exists}$, אז רוצים להראות

שאם (S) נכון, אז $T=T_{\forall\exists}$. לכן כך ניסחנו

טענה: ① התקיים: ① $T=T_{\forall\exists}$

② אם C שרשרת של מודלים של T אז גם $\bigcup C$ כזאת.

עוד טענה: ② אם C שרשרת של הרחבות אלמנטריות אז $\bigcup C$ הוא הרחבה אלמנטרית של כל $M\in C$.

הערה: אם $M\leq N$ (תת מודל אלמנטרי) אז התורה שלהם שווה כי אם φ פסוק לפי ההגדרה $\varphi^N=\varphi^M$.

הוכחת (S)$\Rightarrow$(1) בעזרת טענות ①②.

לפי (1) מספיק להראות ש-$\bigcup C$ מודל של T לכל שרשרת של מודלים של T. הנחה S אומרת שכל שרשרת כזו היא אלמנטרית ולכן לפי 2 גם $\bigcup C$ מודל של T.

הוכחת 2: באינדוקציה על בניית הנוסחאות - עבור נוסחאות חסרות כמתים, זאת פשוט ההגדרה של $\bigcup C$. התנאי סגור תחת פעולות בוליאניות.

נניח שהטענה נכונה ל-$\psi(x,y)$ ונסתכל על $\varphi(x)=\exists y\,\psi(x,y)$.
נסמן $N=\bigcup C$ וניקח $M\in C$ צריך להראות ש-$\varphi(M)=\varphi(N)\cap M$.
כלומר, אם $m\in M$ אז $m\in\varphi(M)$ אמ"מ $m\in\varphi(N)$. נניח ש-$m\in\varphi(M)$, אז יש $m'\in M$ כך ש-$\langle m,m'\rangle\in\psi(M)$ ולפי ה.א. $m,m'\in\psi(N)$ אז $m\in\exists_y\psi(N)$.

בכיוון ההפוך, נניח ש-$m\in\varphi(N)$, אז יש $n\in N$ כך ש-$\langle m,n\rangle\in\psi(N)$. יש $M_1\in\bigcup C$ כך ש-$n\in M_1$, $M\subseteq M_1$, ומתקיים גם $m\in\varphi(M_1)$. מכיוון ש-M_1 הרחבה אלמנטרית של M. לכן $m\in\varphi(M)$ כנדרש.

טענה ③: נניח ש-M מודל של $T_{\forall\exists}$, אז אפשר למצוא מבנים $M\subseteq N\subseteq M_1$ כך ש-N מודל של T וההרחבה $M\leq M_1$ היא אלמנטרית.

הערה: אם M מודל של T, נסתכל על התורה $T_{(M)}$ שבה הוספנו קבועים עבור איברי M וגם כל התורה של M. אז מודל של $T_{(M)}$ הוא מודל של T שהוא הרחבה אלמנטרית של M.

CamScanner

<u>הוכחת הלמה:</u> נסתכל על התורה $T_1 = T \cup T_{(m)\forall}$.

אם N מודל של T_1 אז קבלנו הוגו מודל של T

וכיוון שהוא מודל של $T_{(m)\forall}$ אפשר לשכן אותו כתת

מבנה במודל M_1 של $T_{(m)}$. אז $N \subseteq M_1$ ולפי

(היטרה) $M \preccurlyeq M_1$.

נותר להוכיח ש-T_1 ספיקה ונעשה זאת כרגיל בעזרת

משפט הקומפקטיות — אם לא, אז קיים $\varphi \in T_{(m)\forall}$ כך

ש- $T \models \neg\varphi$.

אז $\varphi = \forall_x \psi(x,m)$ לנוסחא חסרת כמתים ψ. אז

$\neg\varphi = \exists x \neg\psi(x,m)$. אז $T \models \underbrace{\forall y \exists x \neg\psi(x,y)}_{\in T_{\forall\exists}}$ בסתירה

להנחה ש-M מודל של $T_{\forall\exists}$.

<u>הוכחת טענה 1:</u> (א) $\Leftarrow$ (ב): ניקח C כמו ב-(ב) ונסמן $N = \cup C$.

צריך להוכיח ש-N מודל של T אבל לפי (א) די להראות

ש-N מקיים פסוקים מהצורה $\forall y \exists x \psi(x,y)$ שנכונים באיברים

של C. אז צריך להוכיח שלכל $n \in N$ קיים $n_1 \in N$ כך

ש- $\psi(n,n_1)$. יש $M \in C$ כך ש- $n \in M$ ומכיוון ש-M

מודל של T יש $n_1 \in M$ שקיים $\psi(n,n_1)$.

(ב) $\Leftarrow$ (א): ניקח $M = M_0$ מודל של $T_{\forall\exists}$, וצריך להראות שהוא

מודל של T. לפי הלמה יש N_0 מודל של T ו-M_1 כך

ש- $M_0 \subseteq N_0 \subseteq M_1$ ו-M_0 תת אלמנטרי של M_1. נחזור

על הלמה שוב ונקבל N_1, M_2 כך ש- $M_1 \subseteq N_2 \subseteq M_2$ ו-$M_1 \preccurlyeq M_2$,

נמשיך ונקבל שרשרת C. נסמן $N = \cup C$. כלומר

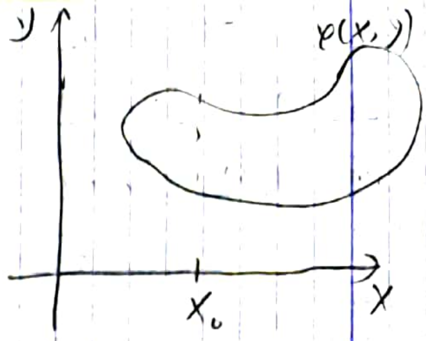
$N = \cup_i N_i$ ו-N_i מודלים של T, ולכן N מודל של T.

כמו כן $N = \cup\{M_i\}_i$ שהם אלמנטריים לכן לפי טענה

2, $M_0 \preccurlyeq N$. אז M_0 מודל של T.

$\varphi(\bar{x},y) = \sum_{i=0}^{n} x_i y^i = 0$

$\forall_x \exists y \left(x_n \neq 0 \to \sum x_i y^i = 0\right)$



<u>הערה:</u> ראינו שאם קיימת שמירה מודלית T אז $T_{\forall\exists} = T$.

<u>תרגיל:</u> אם T_0 תורה כוללת אז יש שמירה $\Gamma = T_{\forall\exists}$ של T_0 שהיא הכי גדולה, אם ל-T_0 יש שמירה מודלית אז זאת היא. זה קורה בדיוק כשכל המודלים של $T_{\forall\exists}$ סגורים קיומית.

<u>שדות סגורים דיפרנציאלית</u>

DD-תחומים דיפרנציאליים (ממציין 0)

(תמיד נוכל להרחיב בדרך יחידה את הנגזרת לשדה השברים)

מערכת אקסיומות של Lenore Blum:

<u>הגדרה:</u> שדה סגור דיפרנציאלית הוא שדה דיפרנציאלי K המקיים: לכל פולינומים דיפרנציאליים $f(x), g(x)$ במשתנה אחד מעל K כך ש-$\operatorname{ord}(g) < \operatorname{ord}(f)$ יש $a \in K$ כך ש-$f(a)=0$ ו-$g(a) \neq 0$.

התורה של שדות סגורים דיפרנציאלית נקראת DCF.

<u>הערה:</u> בפרט, עבור $\operatorname{ord}(f)=0$ מקבלים שכל מודל של DCF הוא סגור אלגברית.

<u>טענה:</u> כל תחום דיפרנציאלי ניתן לשכן במודל של DCF.

<u>הוכחה:</u> אפשר להניח כבר ש-K שדה דיפרנציאלי, ניקח f, g מעל K כמו בהגדרה. לפחות אחד מהאיברים של f יהיה מאותו סדר n כמו f ומספיק למצוא איבר שמאפס אותו. אז אפשר להניח ש-f אי פריק.

ראינו שיש אידיאל דיפרנציאלי $I(f)$ שכולל את f והוא ראשוני וכל איבר ב-$I(f)$ הוא מסדר לפחות n. בפרט, $g \notin I(f)$ אז $K\{x\}/I(f)$ תחום דיפרנציאלי שבו התמונה של X היא

פיתרון של $f(x)=c$ ו- $g(x)\neq 0$. אז שדה הסגירה
שלו הוא שדה שבו יש פיתרון לבעיה (f,g).
נבחר סדר טוב על קבוצת הזוגות (f,g) שמקיימים
את התנאים ונחזור על הבניה שלב שלב.
נקבל שרשרת שהאיחוד שלה הוא שדה דיפרנציאלי K_1
שבו יש פיתרון לכל הזוגות (f,g) מעל K.
באותו אופן נבנה K_2 שבו יש פיתרון לכל הזוגות
מעל K_1 וכן הלאה. ניקח את האיחוד
של כולם וזה יהיה שדה סגור דיפרנציאלית.

משפט: DCF מחלצת כמתים, ולכן היא ההשלמה
המודלית של DD.

הוכחה: מספיק להראות של נוסחאות מהצורה $\exists x \varphi(x,\bar{y})$ שקולה
לנוסחא בלי כמתים. ראינו שכדי להראות את זה, מספיק
להראות שאם L שדה סגור דיפרנציאלית, $\bar{a}\in L$
ו- $\varphi(x,\bar{a})$ ספיקה ב-L אז $\varphi(x,\bar{a})$ ספיקה בכל שדה
סגור דיפרנציאלית E שמכיל את $\bar{a}$.
נסמן ב-K את השדה הדיפרנציאלי שנוצר ע"י $\bar{a}$. אם b
מספק את $\varphi(x,\bar{a})$ ב-L.
נסתכל על! $I := I(b/K) = \{p\in K\{x\} \mid p(b)=0\}$
זה אידיאל דיפרנציאלי ראשוני. לכן יש פולינום דיפרנציאלי
f כך ש- $I = I(f)$.
אפשר להניח ש- $\varphi(x,\bar{a}) := p_1(x)=0 \wedge \dots \wedge p_m(x)=0 \wedge q(x)\neq 0$
כאשר p_i, q פולינומים דיפרנציאליים מעל K. בפרט
$p_i\in I$. אפשר להניח ש-q מסדר יותר נמוך מהסדר
של F בגלל תלות אלגברית. לפי האקסיומות,
ב-E יש איבר c כך ש- $F(c)=0$ וגם $q(c)\neq 0$.