$\exists x_1, \ldots, \exists x_k (x_1 \neq x_2 \wedge \ldots)$

אז $T \cup \{\psi_k\}$ עקבית כי לכל k יש שדה מגודל שמרחיב את F^p. לכן כל תת קבוצה סופית של T, היא עקבית אבל לאור סתירה... לכן של T אין מודל.

הרצאה 3

<u>מה המצב?</u> F קבוצת הנוסחאות $F = (F_I)_I$, $R_I \subseteq F_I$ הן נוסחאות חסרות כמתים. (I קבוצה סופית של משתנים)

<u>דוגמא:</u> A חוג חילופי, $R_I = \{p = 0\}$ כאשר p פולינום במשתנים מהקבוצה I.

<u>דוגמא:</u> $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (חסר כמתים), $\exists z (x^2 + yz) = 0$ (יש כמת)

אפשר לדבר גם על העתקות:

<u>הגדרה:</u> אם M ו- N מבנים עבור השפה הנתונה, הומומורפיזם מ-M ל-N הוא פונקציה $f: M \to N$ כך שלכל $\varphi \in R_I$ אם $\bar{m} \in \varphi(M)$ אז $f(\bar{m}) \in \varphi(N)$ וגם $\bar{m} \in (\neg\varphi)(M)$ אז $f(\bar{m}) \in (\neg\varphi)(M)$

<u>תרגיל:</u> הומומורפיזם דוגמאות של החוגים להם הומומורפיזם של חוגים במובן האלגברי. אותו תנאי עבור $R_I = F_I$ לא מתאים להומומורפיזם כללי:

$\varphi(y): \neg\exists x (x^2 = y)$

$f: \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$2 \notin \varphi(\mathbb{Q})$ $\quad$ $2 \in \varphi \mid f(\mathbb{Q})$

נניח ש- C היא מחלקת המודלים של תורה T, $A \in C$. נגדיר ע"ס-תכל של המחלקה C_A (זוג מבנים של שפה $\mathbb{P}$) (M, f) כאשר $M \in C$ ו- $f: A \to M$ הומומורפיזם. אז C_A היא מחלקת המבנים עבור השפה F^A המורחבת על ידי

$$F^A_I = \bigcup_{\substack{A_0 \subseteq A \\ A_0 \text{ סופית}}} F_{I \cup A_0}$$

אם T תורה ו- C מחלקת המודלים של אז ע"ס-תכל של התורה T_A בשפה F^A שניתן ע"י $T \vee \{\varphi \in R^A_\emptyset \mid$ A נכון ב- $\varphi\}$

<u>שימוש</u>: נוסחה כוללת היא נוסחה מהצורה

(לכל ימין, n) $\forall x_1,\dots,x_n\ \varphi(x_1,\dots,x_n)$ כאשר $\varphi\in R_I$.

הרבה מבנים אלגבריים מוגדרים ע"י נוסחאות כוללות (כמו חוגים למשל) — מה זה אומר אם למחלקה יש מערכת אקסיומות כוללת, כלומר שהפסוקים בתורה נובעים מקבוצת פסוקים כוללים.

— אם T טיפוסית תורה, אפשר להסתכל על החלק הכולל שלה: $T_\forall = \{\varphi \mid$ פסוק כולל שייך ל-T $\varphi\}$. ואפשר לצייר את המודלים של $T_\forall$ (לא נובע) במונחים של המודלים של T.

כל מודל של T הוא גם מודל של $T_\forall$.

<u>טענה</u>: המודלים של $T_\forall$ הם בדיוק תתי המבנים של המודלים של T.

(תת מבנה הוא תת קבוצה של מבנה כך שההכלה היא הומומורפיזם)

<u>הוכחה</u>: כל תת מבנה של מודל של T הוא מודל של $T_\forall$ — כי כל מודל של T הוא מודל של $T_\forall$, ואם M מודל של $T_\forall$ ו-M_0 תת מבנה של M אז הוא גם מודל של $T_\forall$. (כי זאת תורה כוללת)

בכיוון ההפוך, נניח ש-M מודל של $T_\forall$. צ"ל שיש מודל N של T כך ש-M תת מבנה של N.

N כזה הוא מודל של T_M, אז צריך להראות ש-T_M עקבית. נניח שלא, אז ממשפט הקומפקטיות יש תת קבוצה סופית של T_M שהיא לא עקבית, אז יש פסוק מהצורה $\varphi_0\wedge\varphi_1$ ב-T_M שהוא לא עקבי כאשר $\varphi_0\in T$ ו-$\varphi_1'\in R$ בשפה המורחבת.

אז $\varphi_0\models \underbrace{\forall x\ \neg\varphi_1'(x)}_{\in T_\forall}$ אבל זה גורר סתירה, כיוון ש-M מודל של $T_\forall$.

<u>דוגמאות</u>: שדות הם אינם תורה כוללת — האקסיומה $\forall x\neq 0\ \exists y\ xy=1$ היא לא פסוק כולל.

במקרה הזה, התורה הכוללת היא התורה של תחומי שלמות

שקר כי את האקסיומה $\forall x \forall y\, (xy=0 \to (x=0 \vee y=0))$

<u>נוסחאות חסרות כמתים ותורת השדות</u>

A חוג חילופי, זרועים קוליאנים של משוואות פולינומיות

<u>הגדרה</u>: תת-קבוצה <u>סגורה זריצקי</u> של k^n (k שדה) היא קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות סופית $p_1(\bar{x}) = \dots = p_m(\bar{x}) = 0$ ("תת יריעה אפינית של k^n") $\bar{x}=(x_1 \dots x_n)$ ה-p_i פולינומים מעל k

למשל- $k=\mathbb{R}$, $p(x,y)=x^2+y^2-1$, מעגל היחידה.

אם $Z \subseteq k^n$ קבוצה סגורה זריצקי יש קבוצות המשוואות שמגדירה

אבל Z לא יחיד: (א) $p=q=0$ אמ״מ $p=0$ גם $rp+q=0$ לכל r שהוא פולינום.

(ב) p פולינום, $p^3=0$ אמ״מ $p=0$.

(ג) אם $k=\mathbb{R}$, $x^2+1=0$ אמ״מ $1=0$. (זה תלוי בשדה - יכול להיפתר אם מסתכלים על שדה יותר גדול)

עבור (ב), נשאל למשל מה ההבדל בין $x=0$ ל-$x^2=0$. שוין הבדל בקבוצות, אבל יש חוגים: כמו $k[x]/x^2 = k[\epsilon] = \{a+b\epsilon \mid a,b \in k\}$, $\epsilon^2=0$

עבור (א) נתבונן את הפולינומים $p_1 \dots p_n$ באידיאל שהם יוצרים בתוך חוג הפולינומים: $I = \{\sum q_i p_i \mid q_i \in k[x_1 \dots x_n]\}$

אם $X \subseteq k^n$, נגדיר $I(X)=\{p \in k[x_1 \dots x_n] \mid p(\bar{a})=0 \ \forall \bar{a} \in X\}$ זהו אידיאל.

לכל $I \subseteq k[x_1 \dots x_n]$ נגדיר $Z(I)=\{\bar{a} \in k^n \mid p(\bar{a})=0 \ \forall p \in I\}$

נסמן $A=k[x_1 \dots x_n]$.

(1) $I_0 \subseteq A$ תת קבוצה. אז $I(Z(I_0))$ זה אידיאל שמכיל את I_0 ולכן מכיל את האידיאל שנוצר ע״י I_0.

האם $I(Z(I_0))$ שווה לאידיאל שנוצר ע״י I_0?

לא, למשל אם $I_0=x^2$ אז $Z(I_0)=0$ ו-$I(Z(I_0))=(x)$

דוגמא נוספת, אם $k=\mathbb{R}$, $I_0=x^2+1$ אז $Z(I_0)=\emptyset$ ו-$I(Z(I_0))=A$.

<u>אבל</u>, אם $Z \subseteq k^n$, $I_0(I(Z))$ אז $I(Z(I_0))=I_0$:

אם $p \in J$ אז $p(\bar{a})=0$ לכל $\bar{a} \in Z(I_0)$ לכן $p(a)=0$

ב. אם $Z=Z(I_0)$ לאיזשהו $I_0 \subseteq A$ אז $Z(I(Z))=Z$.
(תרגיל)

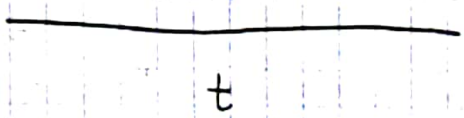
הגדרה: חוג חילופי נקרא **נתרי** אם כל אידיאל בו נוצר סופית.

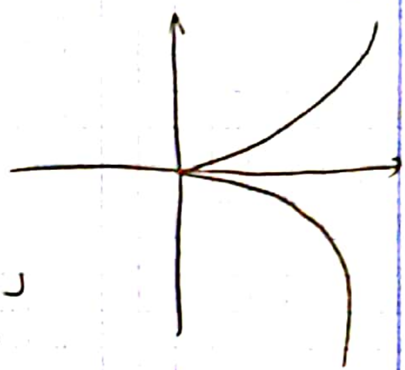
משפט הבסיס של הילברט: 1) אם A נתרי אז $A[x]$ נתרי (ובפרט אם A חוג נתרי (למשל שדה) אז גם $A[x_1,\dots,x_n]$. 2) מנה של חוג נתרי הוא חוג נתרי.

מסקנה: כל קבוצה המוגדרת ע"י אוסף של אידיאל היא סגורה זריצקי.

דוגמא: $y^2=x^3$

$t \mapsto \langle t^2,t^3 \rangle$





נרצה לדבר על טופולוגיה ועל מה שיבדיל בין שתי התמונות האלה.

הרצאה 3 **דוגמא:** ב- k^3:

$$Z: \begin{cases} x^2+y^2-2z=0 \\ y(z^2+1)-2z=0 \end{cases}$$

$$I(Z) \supseteq (x^2+y^2-1,\ y(z^2+1)-2z)$$

הגדרה: יריעה אפינית מעל k היא זוג (A,X) כאשר X היא קבוצה, A אלגברה של פונקציות מ-X ל-k כך ש-
א) A נוצרת סופית כאלגברה מעל k.
ב) לכל $x\in X$ יש העתקה של אלגבראות $\varphi_x: A \to k$ שנתונה ע"י $\varphi_x(f)=f(x)$
הטענה היא ש- $\underline{x \mapsto \varphi_x \in \mathrm{Hom}_{\text{אלג}}(A,k)}$ היא הפיכה.
(כלומר חח"ע ועל)

דוגמא: אם k שדה אינסופי, אז $A=(k[x_1,\dots,x_n],k^n)$ היא יריעה אפינית:
א) A היא אלגברה נ"ס מעל k ע"י $x_1,\dots,x_n$.
ב) אם $\bar{x}\in k^n$ אז $\varphi_{\bar{x}}(p)=p(\bar{x})$. אם $\bar{y}\neq \bar{z}$ אז

ו- $y_i \neq z_i$ לאיזשהו i, ואז $y_i = \varphi_y(x_i) \neq \varphi_z(x_i) = z_i$.

מאידך, יהי $\varphi: A \to k$ העתקה של אלגבראות מעל k. אז $\varphi = \varphi_y$ כאשר $y_i = \varphi(x_i)$.

<u>הערה</u>: A היא אלגברה של פונקציות על X כי k אינסופי.
כלומר, לכל $a \in A$ אם $a(x)=0$ לכל $x \in X$ אז $a=0$.

<u>הערה</u>: בהינתן A המבנה של היריעה נקבע ביחידות כי $X \cong Hom_{k\text{-}alg}(A,k)$. אבל, בהינתן אלגברה A, זוג (A,X) לא בהכרח יריעה אפינית.

<u>דוגמא</u>: $A = k[\epsilon] = k[x]/x^2$. $\{pt\} = Hom(k[\epsilon],k)$.

<u>טענה</u>: אם $Z \subseteq k^n$ תת קבוצה סגורה זריצקי אז $(S/I(Z), Z)$ היא יריעה אפינית, כאשר $S = k[x_1,\dots,x_n]$.

<u>הוכחה</u>: אם $a \in S/I(Z)$ ניקח פולינום p שתמונתו היא a ונגדיר $a(z) = p(z)$ לכל $z \in Z$. זה מוגדר היטב כי אם $p(z)=0$ לכל $z \in Z$ אז $p \in I(Z)$.

$S/I(Z)$ נוצרת סופית כי היא מנה של S.

אם $z_1 \neq z_2 \in Z$ אז הם שונים על איזשהי קואורדינטה ונפריד אותם ע"י התמונה של הקואורדינטה הזאת ב- S/I.

אם $\varphi: S/I(Z) \to k$ העתקה, ההרכבה $\varphi \circ \pi$ נותנת ה.ש. ולכן מתאימה לנקודה $z \in k^n$. Z סגורה לכן:
ולכן לפי אתמול, כדי להראות ש- $z \in Z$ מספיק להראות ש- $a(z)=0$ לכל $I(Z)$ (ראינו שאם Z סגורה זריצקי אז $Z(I(Z)) = Z$)
אבל $a(z) = \varphi(\pi(a)) = \varphi(0) = 0$ כנדרש. ■

מכיוון השני, אם (A,X) יריעה אפינית אז A נוצרת סופית, כלומר יש העתקה $\pi: S \twoheadrightarrow A$ עבור אלגברת הפולינומים $S = k[x_1,\dots,x_n]$. נסמן ב- I את $ker\,\pi$, ואת $Z_0 = Z(I)$. תרגיל - $I = I(Z_0)$.

נניח ש- (A,X) ו- (B,Y) יריעות אפיניות.
העתקה מ- (A,X) ל- (B,Y) היא פונקציה $t: X \to Y$

רק שלכל $f\in B$, מתקיים $f\circ t\in A$. בסדר,

מקבלים העתקה של אלגבראות: $B\to A$, $f\mapsto f\circ t$

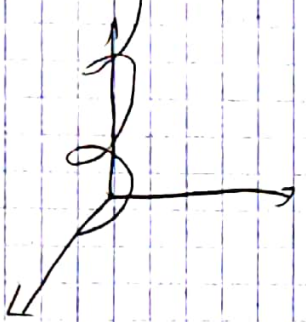
תרגיל: כל העתקה g של אלגבראות מ-B ל-A מתאימה להעתקה יחידה כזאת.

פתרון: $X=Hom(A,k)$, $Y=Hom(B,k)$, אז $x\mapsto x\circ g$.

דוגמא: העתקות של יריעות מ-(A,X) ל-$(k[t],k)$ מתאימות לאיברים של A. ראינו שהעתקה כזאת מתאימה להעתקה של אלגבראות $k[t]\to A$, $t\mapsto a$.

דוגמא: $I_0=\langle x^2+y^2-1,\ y(z^2+1)-2z\rangle \overset{?}{=} I\left(Z\left(\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y(z^2+1)=2z \end{cases}\right)\right)$

כדי להוכיח שוויון, די להראות ש-$k[x,y,z]/I_0$ היא אלגברה גאומטרית (שהיא אלגברת הפונקציות של יריעה).



ואכן $y=\frac{2z}{z^2+1}$, $x=\frac{z^2-1}{x^2+1}$

״פרמטריזציה רציונלית של המעגל״

ואפשר להראות $k[x,y,z]/I_0$.

$x^2+y^2=1 \subseteq \mathbb{R}^2$

$x^2+y^2=1,\ z=0 \subseteq \mathbb{R}^3$

שני אלו איזומורפיים: $k[x,y]/\langle x^2+y^2-1\rangle$, $k[x,y,z]/\langle x^2+y^2-1,z\rangle$

מה לגבי $x^2+y^2+z^2=1$? האם $S^1\cong S^2$?

אם היה איזומורפיזם של פולינומים, הוא היה גם רציף, אבל זה לא יכול להיות כי ל-S^1 ול-S^2 אין את אותו מימד (כיריעות דיפרנציאליות).

היינו רוצים שתהיה לנו דרך לדבר על מימד בהגדרה אלגברית:

תזכורת ממרחבים וקטוריים: מימד הוא גודל של בסיס, או, באופן יותר גאומטרי, המימד של V הוא אורך מקסימלי של שרשרת של תתי מרחבים $0\subsetneq V_n\subsetneq\cdots\subsetneq V_0=V$

כדי להראות ש-א ו-ב, שקולים, נוח להתייחס את

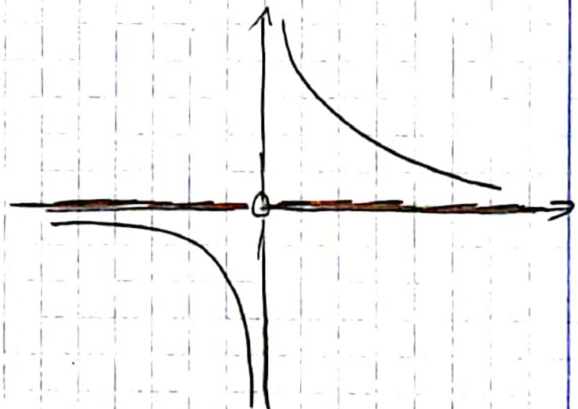
V ב-V^*: $\ker(\varphi_1) \supsetneq \ker(\varphi_1)\cap\ker(\varphi_2) \supsetneq \ker\varphi_1\cap\ker\varphi_2\cap\ker\varphi_3 \supsetneq \dots$

<u>הגדרה</u>: אם (A,X) יריעה אפינית, אז תת קבוצה סגורה לריזקי של X היא קבוצה מהצורה $Z(I_0)$ כאשר $I_0 \subseteq A$.

$$Z(I_0) = \{x\in X \mid f(x)=0 \ \forall f\in I_0\}$$

<u>הערה</u>: אם $Y\subseteq K^n$ יתכן שיש העתקה של יריעות אפיניות $f: X\to K^n$ חח"ע והתמונה של Y אבל Y לא סגורה לריזקי ב-K^n.

לדוגמא, $Y=\{x\in K \mid x\neq 0\}$ לא סגורה לריזקי אבל היא התמונה של ההטלה של $xy=1$ על ציר ה-x:



<u>ניסיון</u>: המימד של יריעה אפינית כגודל האורך המקסימלי של שרשרת יורדת של תתי יריעות סגורות.

<u>הערה</u>: תת קבוצה סגורה מתאימה לאידיאל ב-A.

שרשרת יורדת של תתי קבוצות סגורות מתאימה לשרשרת עולה של אידיאלים. כל שרשרת כזאת היא סופית בכל אלגברה נתרית, למשל $K[x_1,\dots,x_n]/I$.

<u>דוגמא</u>: (כישלון) אם $X=\{0,1,2\}\subseteq\mathbb{R}$, רוצים שהמימד יהיה 0 אבל המימד הוא $3/2$

<u>דוגמא</u>:

$xz=0$
$yz=0$

לא ברור מה המימד - 1 או 2?

<u>הגדרה</u>: יריעה X נקראת <u>פריקה</u> אם היא איחוד של שתי תתי יריעות סגורות. (ונגיד שהקבוצה הריקה היא לא יריעה פריקה גם כן) ממש

<u>הגדרה</u>: (הגדרה נכונה של מימד): המימד של יריעה אפינית הוא האורך המקסימלי של תתי יריעות אי פריקות.

אלגברית, יריעה היא אי פריקה, אמ"מ האלגברה שלה היא תחום שלמות.