5/4/22

מושגים

* יש סיכוי לא רע (לפי המבחן שלי) שגיאות אותיות או מילים, או שגיאות דיוק של חצאי משפטים. סליחה מראש.

בשיעור שעבר התחלנו לדבר על אלגברה דיפרנציאלית

עם $A\{\bar{x}\}$ פולינומים דיפרנציאליים

דוגמאות:

א. לכל חוג הוא חוג דיפרנציאלי אם נגדיר את הנגזרת $d:A\to A$ ע"י $d(x)=0$ לכל x.

- זו לא דוגמא מעניינת במיוחד.

ב. A פונקציות חלקות על $(0,1)$ עם הנגזרת הרגילה.

- פה יש תכן: אינטואיטיבית אפשר לחשוב על הפרמטר כזמן (נגיד שעובר הזמן)

אבל פורמלית זה לא מאוד מעניין כי זה לא תחום שלמות.

ג. A הפונק' ההולומורפיות על כדור פתוח $U\subseteq\mathbb{C}$. $\Leftarrow$ תחום שלמות. עם הנגזרת הרגילה.

אפשר גם להסתכל על שדה השברים שלו הפונק' המרומורפיות

3. באופן יותר כללי אפשר להסתכל על פונק' על יריעה אבל צריך לבחור נגזרת (כלומר שדה וקטורי מאותה חלקות).

למשל הישר הפרויקטיבי $\mathbb{C}(t)$ עם הנגזרת $t\mapsto 1$.

לכל פונק' רציונלית $r\in\mathbb{C}(t)$ יש נגזרת יחידה $d_r:\mathbb{C}(t)\to\mathbb{C}(t)$ כך ש-$d_r(t)=r(t)$-ו

$d_r(a)=0$ לכל $a\in\mathbb{C}$. (יחידות - ברור)

תרגיל: 1) אם A תחום שלמות דיפר' אז יש נגזרת יחידה על $K(A)$ שמרחיבה את

הנגזרת של A $d(\frac{a}{b}):=\frac{d(a)b\ \ ad(b)}{b^2}$.

2) לכל חוג דיפרנציאלי A תת הקבוצה $C_A:=\{c\mid d(c)=0\}$ היא תת-חוג (חוג הקבועים)

ואם A שדה אז גם C_A.

הערה: המשוואה $x'=0$ היא נוסחה חסרת כמתים והקבוצה המוגדרת היא C_A.

אם נסתכל על $K=\mathbb{C}(t)$ עם $t'=t$ אז אנליטית t היא פונק' האקספוננט כלומר $t=e^z$,

אבל אלגברית e^z ו-z נראים אותו הדבר - שניהם לא מאפסים אף פולינום מעל $\mathbb{C}$.

⇐ הגזירה מאפשרת להפריד ביניהם.

⇐ בפרט, אין כרגע משמעות טבעית בה השדה סגור אלגברית.

הגדרה: אידיאל דיפרנציאלי בחוג דיפרנציאלי A הוא אידיאל I כך שלכל $f\in I$ גם $f'\in I$.

באופן שקול: A/I הוא חוג דיפרנציאלי באופן יחיד שהופך את ההעתקה $A\to A/I$ להעתקה של חוגים דיפרנציאליים.

דוגמאות: אמרנו אתמול שחוג הפולינומים הדיפרנציאליים מאין איברים. בפרט אם נרצה שנוצר ע"י איבר אחד אז נקבל למשל את האידיאל הנוצר ע"י $x-x'$ ב-$\mathbb{C}\{x\}$ מתאים להעתקה $\mathbb{C}\{x\}\to M$ (עם M הפונק' החלקות על $(0,1)$) המוגדרת $x\mapsto e^t$.

אנחנו הולכים להתעניין בעיקר בשדות ⇐ אם K שדה דיפרנציאלי ו-$\varphi: A\to K$ העתקה של חוגים דיפרנציאליים אז הגרעין של φ הוא אידיאל דיפרנציאלי ראשוני.

אם K הרחבת שדה דיפרנציאלי L, אז ראינו שאיברי K מתאימים להעתקות $L\{x\}\to K$ מעל L והגרעין של כל העתקה כזו הוא אידיאל דיפרנציאלי ראשוני.

אלגברית: יהא איבר בהרחבה K של שדה L ⇔ העתקה $L[x]\to K$ ⇐ אידיאל ראשוני ב-$L[x]$ ⇔ איבר אי-פריק ב-$L[x]$.

- באופן כללי איבר a הוא אי-פריק אם הוא לא מכפלה לא טריוויאלית של שני איברים, ו-a הוא ראשוני אם (a) הוא ראשוני, כלומר לכל b,c אם $a|bc$ אז $a|b$ או $a|c$.

⇐ איבר אי-פריק הוא לא בהכרח ראשוני.

- בחוגי פולינומים a אי-פריק ⇔ a ראשוני.

- בחוג פולינומים עם איבר אחד, כל אידיאל ראשוני נוצר ע"י איבר אחד (דוגמה, חילוק של פולינומים).

אלגברה דיפרנציאלית: הפולינום הדיפרנציאלי $p(x)=x''^2+2x'$ אי-פריק אלגברית אבל

$p'(x)=2x''(x'''+1)\in\langle p\rangle$, אבל $2x''\notin\langle p\rangle$, $x'''+1$. האידיאל הדיפרנציאלי הנוצר ע"י p

⇐ אם $a\in K$ ו- $p(a)=0$ אז $p'(a)=0$ כלומר $2a''\cdot(a'''+1)=0$ אבל אנחנו עובדים בשדה

ולכן $a'''+1=0$ או $a''=0$.

עד כאן הסברנו למה המצב יותר מסובך מהמקרה האלגברי, אבל עכשיו נראה איך אפשר לתקן את זה:

עדיין לא מצוין מתישהו

במקרה כזה a מאפס את x'' (וגם את p) אז $2a'=0$ ו- $a'=0$

הערה: אם b איבר של חוג דיפרנציאלי A ו- $p(x)=\sum a_i x^i$ פולינום (רגיל) מעל A אז:

$$p(b)'=\underbrace{\sum a_i' b^i}_{p^\delta(b)}+\underbrace{\Big(\sum_{i\geq 1} i a_i b^{i-1}\Big)}_{\frac{\partial p}{\partial t}(b)}\cdot b'$$

$\Rightarrow p(b)'=p^\delta(b)+\frac{\partial p}{\partial t}(b)\cdot b'$

הגדרה:

1. הסדר של $p\in K\{x\}$ הוא הנגזרת הגבוהה ביותר המופיע ב- p.
2. אם $p,q\in K\{x\}$ אז p יקרא **יותר פשוט** מ-q אם הסדר של p קטן מהסדר של q, או שהסדר שלהם שווה, נניח n, אך הדרגה של p כפולינום ב- $x^{(n)}$ קטן או שווה לדרגה של q. נסמן את הסדר הזה $p<<q$.

נניח שהסדר של p הוא n. ניקח $A=K[x^{(0)},\dots,x^{(n-1)}]$ אז p פולינום ב- $x=x^{(n)}$ מעל A

כמוצגות אותו החישוב כמקודם $p'=\underbrace{\sum\cdots}_{p^\delta}+\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x^{(n)}}}_{S_p}\cdot x^{(n+1)}$

ספרנט separant

לגבי' מתחלק ב- S_p ⇐ כמו בדוגמא.

בדוגמא: $n=2$, $S_p=2x''$. ⇐ p^δ מתחלק ב- S_p ⇐ האידיאל לא ראשוני.

עבור m טבעי כלשהו:

נסמן $I(p):=\{g\in K\{x\}\mid s^m\cdot g\in\langle p\rangle\}$ כאשר $s=S_p=\frac{\partial p}{\partial x^{(n)}}$ עבור n הסדר של p.

משפט: א. אם p אי-פריק אז $I(p)$ אידיאל דיפרנציאלי ראשוני.

ב. אם I אידיאל דיפרנציאלי ראשוני ב- $K\{x\}$ אז יש p מינימלי ביחס $<<$ ב- I

כך ש- $I=I(p)$.

הערה: אם $p=p_1\cdot p_2$ לא טריוויאלית אז $p_1, p_2 \ll p$ (ממש) ולכן המינימלי בסעיף ב' הוא אי-פריק.

בשיעור הבא נוכיח את המשפט.