הרצאה 4 תזכורת.

יריעות אפיניות (A, X)

$I \subseteq A$ מגדיר $Z(I)=\{x\in X \mid f(x)=0 \ \forall f\in I\}$ סגורות לזריצקי.

כל שרשרת יורדת של תתי הקבוצות סגורות היא סופית.

Z אי פריקה אם היא לא איחוד לא טריוויאלי של קבוצות סגורות.

מימד של Z זה האורך המירבי של שרשרת יורדת של תתי קבוצות אי פריקות.

<u>דוגמאות/תרגיל</u>: א. אם X סופית ולא ריקה אז היא אי פריקה אמ"מ היא נקודה אחת.

ב. X ממימד 0 אמ"מ היא סופית ולא ריקה.

<u>דוגמא</u>: $(k[x_1,\dots,x_n], k^n)$ היא ממימד לפחות n כי יש את השרשרת $(x_n) \subsetneq (x_n, x_{n-1}) \subsetneq \dots \subsetneq (x_n,\dots,x_1)$

אלגברית, תת קבוצה אי פריקה מתאימה לאידיאל ראשוני.

<u>הגדרה</u>: <u>מימד קרול</u> Krull של חוג חילופי A הוא האורך המירבי של שרשרת עולה של אידיאלים ראשוניים.

<u>שאלה</u>: מה המימד של $k[x_1,\dots,x_n]$ כאשר k שדה? (ראינו שזה לפחות n)

<u>משפט הנורמליזציה של נתר</u>: אם A נוצרת ע"י (מעל שדה) על קבוצה סופית אזי יש תת אלגברה $B\subseteq A$ כך ש- $B \cong k[x_1,\dots,x_m]$ ו- A סופית מעל B, $m<n$.

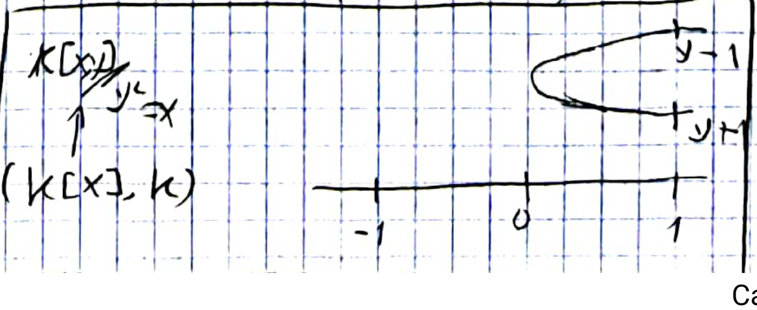
A סופית מעל B אומר ש- A נוצרת סופית כמודול מעל B.

<u>משפט</u>: 1) אם $B\subseteq A$ הרחבה סופית של חוגים, לכל אידיאל ראשוני $P\subseteq A$ הצמצום $P\cap B$ ראשוני ב- B

2) כל אידיאל ראשוני ב- B הוא מהצורה $P\cap B$ עבור אידיאל ראשוני P ב- A.

3) אם $P_1 \subset P_2 \subseteq A$ כך ש- $P_1\cap B = P_2\cap B$ אז $P_1=P_2$.

<u>מסקנה</u>: אם A הרחבה סופית של B אז המימד של A שווה למימד של B.



מסקנה: המימד של $k[x_1,\dots,x_n]$ הוא n

הוכחה: אם $0\subsetneq P_1\subsetneq\dots\subsetneq P_m\subset A$ שרשרת של אידיאלים ראשוניים, נרצה
להראות ש- m מקסימלי. ניקח $f(x_1,\dots,x_n)\in P_1$ ונסתכל על
$A_1=A/f$. A_1 נוצרת כאלגברה סופית ע"י $x_1,\dots,x_n$
ולכן יש העתקה סופית $k(y_1,\dots,y_r)\subseteq A_1$ באינדוקציה שלמה על n,
המימד של A_1 הוא r אבל $0\subset P_1/f\subseteq P_2/f\subseteq\dots\subseteq A_1$ שרשרת
ב-A_1 לכן $n\le r+1\le n$

הגדרה: נניח ש- B הרחבת חוגים של A. תת הקבוצה של $B_0\subseteq B$
היא בלתי תלויה מעל A אם האיברים של B_0 לא מאפסים
אף פולינום $\neq 0$ מעל A. במילים אחרות, ההעתקה הטבעית
$A[B_0]\longrightarrow B$ היא חח"ע.

אם $A\subseteq B$ הרחבת שדות אז תת הקבוצה בת"ל מקסימלית
ב- B מעל A נקראת בסיס טרנסצנדנטי ל- B מעל A.

עובדות: 1) אם B_0 בסיס טרנסצנדנטי ל- B מעל A אז
העתקה של שדות $A(B_0)\longrightarrow B$ מעל A ו- B הרחבה אלגברית
של התמונה.
2) לכל שני בסיסי טרנסצנדנטיות של B מעל A יש אותה
עוצמה שנקראת דרגת טרנסצנדנטיות.

טענה: אם (A,X) יריעה אפינית מעל השדה K, כך ש- A
תחום שלמות אז המימד של A הוא דרגת הטרנסצנדנטיות
של $K(A)$ מעל K.

הוכחה: אם $A=K[x_1,\dots,x_n]$ כאשר שהמימד הוא n ומצד שני
$K(A)=K(x_1,\dots,x_n)$ ו- $x_1,\dots,x_n$ בסיס טרנסצנדנטי, לכן הטענה נכונה
במקרה הכללי, לפי משפט הנורמליזציה של נתר, יש תת אלגברה
$B\subseteq A$ וראינו שהמימד של A ושל B שווים ו- $K(B)\subseteq K(A)$.
הרחבת שדות סופית ולכן אלגברית אז דרגת הטרנסצנדנטיות
שווה. לכן קבלנו הפונקציה עמק לר' הקודם.

אינטואיציה: האיברים של $K(A)$ הם פונקציות שמוגדרות על מעגלים של
תת יריעה סגורה. אז בסיס טרנסצנדנטי נותן מערכת קואורדינטות
על משפט 6 תת הקבוצה סגורה

אלגברה דיפרנציאלית

הגדרה: גזירה (נגזרת) של חוג חילופי A היא העתקה $d: A \to A$ רק ש- $d(a+b) = d(a) + d(b)$ ו- $d(ab) = d(a)b + ad(b)$.

הגדרה: פולינום דיפרנציאלי מעל A במשתנים C הם פולינום מעל A במשתנים $\{c^{(i)} \mid c \in C\}$ (נזהה את $c \in C$ עם $c^{(0)}$)

נסמן ב- $A\{C\}$ את חוג הפולינומים הדיפרנציאליים מעל C.

שימו לב: חוג הפולינומים הדיפרנציאליים במשתנה אחד x מעל A הוא $A[x, x', x'', \ldots]$

אם $d: A \to A$ נגזרת יש מבנה טבעי של גזירה על $A\{C\}$ שמרחיבה את d ע"י $d(c^{(i)}) = c^{(i+1)}$.

אז $A\{C\}$ עם הנגזרת הזאת ממיין פונקציות מ-C לאלגבראות דיפרנציאליות מעל A: $Hom_{(A,d)}(A\{C\}, B) \cong B^C$

כאשר העתקה של חוגים דיפרנציאליים היא העתקה של חוגים שמתחלפת עם הנגזרת: $t: A \to B$ מקיימת $d_B(t(a)) = t(d_A(a))$ לכל $a \in A$

הגדרה: אם (A, d) חוג דיפרנציאלי, <u>תת קבוצה סגורה קולצ'ין</u> של A^n היא קבוצת הפתרונות של מערכת סופית של משוואות $P_1 = \cdots = P_m = 0$ כאשר $P_i \in A\{x_1, \ldots, x_n\}$.