<u>תורת מודלים של שדות דיפרנציאליים</u>

X - מערכת משוואות פולינומיות מעל $\mathbb{Q}$. מה אפשר להגיד על קבוצת הפתרונות שכל הקואורדינטות שלהם הם שורש יחידה?

התשובה לא תלויה בשדה, כל עוד הוא סגור אלגברית - כל שורשי היחידה נמצאים בסגור האלגברי של $\mathbb{Q}$.

האם אפשר להסתכל על $X(\mathbb{C})$ (פתרונות מרוכבים) ולהשתמש במבנה הגאומטרי של $\mathbb{C}$?

כלומר $X(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^n$, הרבה פעמים יריעה מרוכבת!

נסמן: $U = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i$ הם שורשי יחידה$\}$. רוצים להבין את $X(\mathbb{C}) \cap U$.

אם $U = Y(\mathbb{C})$ עבור מערכת משוואות Y (כלומר U גם הייתה יריעה אלגברית אפינית), אפשר היה להשתמש בכלים של גאומטריה אלגברית: מימד, מימד של חיתוכים.

אבל אין Y כזה. למעשה, אין מערכת משוואות לא טריוויאלית Y כך ש-$U \subseteq Y(\mathbb{C})$.

במקום $\mathbb{C}$, ניקח את $K = \mathbb{C}(t)$ שדה אחר של פונקציות. על K יש מבנה טבעי של גזירה - $f \mapsto f'$. אז אם נסתכל על מערכת משוואות דיפרנציאליות פולינומיות, אז אפשר למצוא Y לא טריוויאלי כך ש-$U \subseteq Y(K)$.

למשל $x' = 0$, או, יותר מעניין: $d\log(x) = \frac{x'}{x} = 0$

אפשר לחשוב על ההומומורפיזם $K^\times \to K$: $d\log$ מהחבורה הכפלית לחבורה החיבורית. אז $U =$ (הפיתול של $K^\times$) ובחבורה החיבורית אין פיתול. רעיון זה לא באמת עוזר כי בתוך הגרעין של $d\log$ לא רואים יותר את המבנה הדיפרנציאלי. אבל אפשר להחליף את החבורה הכפלית בחבורות מעניינות אחרות - יריעות אבליות.

<u>רעיון</u>: ננסה לנתח את המבנה של "יריעות אלגבריות דיפרנציאליות", כלומר קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות כאלה:

$P(x,x',x'',\ldots,x^{(n)},y,y',\ldots,y^{(m)})=0$

לפולינום P.

<u>דוגמה נוספת</u>: $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ (חצי המישור העליון)

זהו מודל של גיאומטריה היפרבולית - אפשר למדוד מרחקים וזוויות. האיזומטריות הן העתקות מוביוס: $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ כש- $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ מטריצה ממשית מדטרמיננטה 1.

<u>פונקציית j</u>, $j:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ מקיימת ש- $j(\alpha(z))=j(z)$ לכל $\alpha\in SL_2(\mathbb{Z})$ ($SL_2(\mathbb{Z})=\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mid ad-bc=1\}$ העתקות מוביוס המודולריות)

במילים אחרות, אם $W_\alpha\subseteq\mathbb{H}^2$ הגרף של α אז $j(W_\alpha)\subseteq\Delta(\mathbb{C}^2)=\{(x,x)\mid x\in\mathbb{C}\}$. j היא פונקציה מאוד לא פולינומית-טרנסצנדנטית.

<u>שאלה</u>: האם יש יחס אלגברי בין ערכים של $j,j',\ldots$ מעל מתאים כאלה W_α

יש משוואה דיפרנציאלית אלגברית מסדר 3 ש-j הוא פתרון שלה. לכן

<u>משפט</u>: אין יחסים אלגבריים לא טריוויאליים עבור פתרונות שונים של המשוואה הדיפרנציאלית.

נניח ש-X מערכת משוואות דיפרנציאליות אלגבריות. מה אפשר להגיד על המבנה? האם אפשר לפרק לקבוצות פשוטות ממימד שמתנהג כמו מכפלה טובה? (למשל - [illegible])
באופן יותר כללי, אם $Y\xrightarrow{f}X$ אז רוצים שיהיה קשר בין המימד של Y, X והמימד הסיבים.

מה אפשר להגיד על קבוצות ממימד 1?

<u>גישה 1</u>: תורה אלגברית באנלוגיה לגיאומטריה אלגברית.
זה משמעותית יותר קשה מגיאומטריה אלגברית רגילה. למשל תנאי שרשרת עולה של אידיאלים לא מתקיים.

<u>גישה 2</u>: תורת המודלים – חושבים על מערכת משוואות דיפרנציאלית

בקבוצה גדירה באיזושהי תורה של שדות דיפרנציאליים (DCF)

לתורות מסדר ראשון יש מדד "סיבוך קומבינטורי". מסתבר ש-

DCF היא תורה מאוד לא מסובכת מבחינת הסיבוך הקומבינטורי.
(ש-יציבה)

→ תורת מימד לקבוצות גדירות.

תזכורת מלוגיקה:

<u>מבנה חד סוגי</u> נתון ע"י קבוצה M (העולם) ולכל קבוצה סופית I, תת אלגברה בוליאנית $D_I \subseteq P(M^I)$ ("תתי הקבוצות גדירות") כך ש-

1) אם I,J קבוצות סופיות זרות אז $\{X\times Y \mid X\in D_I, Y\in D_J\} \subseteq D_{I\cup J}$

2) אם $t: J\to I$ העתקה של קבוצות סופיות ו- X גדירה מסוג J אז $t^*X = \{f\circ t \mid f\in X\} \in D_I$

המקרים המעניינים: ① אם $I\subseteq J$, t ההכלה אז t^*X היא הטלה של X על הקואורדינאטות ב- I.

② t תמורה של I אז t^*X כנ"ל הפרמוטציה המתאימה של ה- J-יות.

③ אם J יחידון אז t^*X זה האלכסון של X.
(תרגיל)

<u>הגדרה תחבירית</u>: לכל קבוצה סופית I יש "קבוצת נוסחאות" F_I, לכל $t: I\to J$ יש העתקה $t_*: F_I\to F_J$ ופעולות בוליאניות $\neg, \vee, \wedge: F_I\times F_I\to F_I$ ולכל $a\in I$ יש העתקה $\exists_a: F_I\to F_{I\setminus\{a\}}$

"נוסחאות עם משתנים חופשיים ב- I"

אם $x,y,z,\dots\in I$ אז $\varphi(x,y,z,\dots)\in F_I$. אם $t:\{x,y,z,\dots\}\to\{u,v,w,\dots\}$ אז $t_*\varphi=\varphi(t(x),t(y),\dots)$

אם $\varphi=\varphi(x,y)$, $\psi=\psi(x,w)$ למשל $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\neg\varphi$, $\exists x\,\varphi(x,y,z)\in F_{\{y,z\}}$

נסתכל על מערכות כאלה ש"נוצרות באופן חופשי" מתתי קבוצות $F_I^0\subseteq F_I$ לכל I.

<u>מבנה</u> עבור ה- F_I (מורכב מקבוצה M) נותן לכל $\varphi\in F_I$ תת קבוצה $D_\varphi\subseteq M^I$ כך

ו- $D_{\varphi\wedge\psi}=D_\varphi\cap D_\psi$, $D_{\varphi\vee\psi}=D_\varphi\cup D_\psi$ ו- $D_{\neg\varphi}=D_\varphi^c$

ו- $D_{\exists x\varphi}=t^*D_\varphi$ כאשר $t: I\setminus\{x\}\to I$.

<u>דוגמא:</u> תזכורת: F_I נוצרת באופן רקורסיבי מנוסחאות
(פולינומים שמתאימים תנאי ספציפי ...)

$p(x_1,\dots,x_n)=0$ כאשר p, $I=\{x_1,\dots,x_n\}$ פולינום. אם מקיימים ב-A

$F_I: p_1(x_1,\dots,x_n)=0\wedge p_2(x_1,\dots,x_n)=0\vee p_3(x_1,\dots,x_n)\neq 0$ ← נוסחאות חסרות כמתים.

$\exists y(x\cdot y=1)\in F_{\{x\}}$ נוסחא עם כמת.

כל חוג M שמרחיב את A ניתן לפרש כמבנה לתחשיב הזאת. ניתן לפרש כל פולינום כזה כ- $p_M: M^I\to M$

<u>הערה:</u> אם $\varphi\in D_\emptyset$ אז $M_\varphi\subseteq M^\emptyset=1$. אם $M_\varphi=1$ נגיד ש-φ מתקיימת ב-M ואחרת לא.

$D_\emptyset$ נקראים <u>פסוקים</u>. וקבוצה של פסוקים נקראת <u>תורה</u>.

אם T היא תורה, אז M הוא <u>מודל</u> של T אם φ מתקיים ב-M לכל $\varphi\in T$.

<u>דוגמא:</u> יש תורה Γ המתאימה (של החוגים) עם התכונה M מודל של T אמ"מ M הוא חוג שמרחיב את A:

$\forall x\forall y\forall z(\underbrace{x+(y+z)-(x+y)-z}_{p(x,y,z)}=0)$ $(\forall x\varphi(x)=\neg\exists x\neg\varphi(x))$

$\forall x\forall y(x\cdot y-y\cdot x=0)$

וכו'...

<u>הגדרה:</u> תורה T היא <u>עקבית</u> אם יש לה מודל

(*) נניח ש- $A=\mathbb{F}_p$. האם יש תורה המתאימה לו עם התכונה שהמודלים של T הם בדיוק החוגים הסופיים שמרחיבים את A?

התשובה היא לא:

<u>משפט הקומפקטיות:</u> אם T תורה ולכל תת הקבוצה סופית של T יש מודל אז ל-T יש מודל.

התשובה ל-(*) היא לא. נניח בשלילה שכן, נסמן את התורה ב-T. נסתכל על $T_1=T\cup\{\varphi_n\mid n\in\mathbb{N}\}$

כאשר φ_n אומר יש לפחות n איברים:

$\exists x_1, \dots, \exists x_n (x_1 \neq x_2 \wedge \dots)$

אז $\Sigma \cup T$ עקבית כי לכל k יש שדה מגודל p^k שמספק את F^p. לכן כל תת קבוצה סופית של T היא עקבית

אבל זאת סתירה. לכן של T אין מודל.