1. משפט קנטור ברנשטיין - שרדר

$(0,1) \sim (1,3)$

$A = [1,2) = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x < 2 \}$

$B = (0,3) = \{ x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 3 \}$

$f : A \to B$ הכלה

$g : B \to A \qquad g(x) = \frac{1}{3}x + 1$

$$\underline{h_U(x)} = \begin{cases} f(x) & x \in U \\ g^{-1}(x) & x \notin U \end{cases}$$

$T : P(A) \to P(A)$

$X \subseteq A \rightsquigarrow X^c = A \setminus X$

$X \subseteq B \rightsquigarrow X^c = B \setminus X$

$T(X) = g[f[X]^c]^c \qquad T(U) = U$

$$T(X) = g[X^c]^c = g[X] \cup \{1\}$$

על כן:

$$g[X^c] = g[X]^c \setminus \{1\}$$

מצאנו U נ"ש

$$T(U)=U$$

$$U = \bigcup \{X \mid X \subseteq T(X)\}$$

אם $y \in [1,2)$, נסתכל לטרנרי

$$y = 1.a_1 a_2 \ldots a_k$$

$a_i \in \{0,1,2\}$, כאשר:

$$y = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{3^i} \Rightarrow g(y) = \frac{1}{3} + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{3^{i+1}} + 1$$

אז

$$g(y) = 1.\underline{1}\, a_1 a_2 \ldots$$

$$U = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{3^i} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1,\ 1\tfrac{1}{3},\ 1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9},\ \ldots \right\}$$

$$\cup \left\{ \tfrac{3}{2} \right\}$$

$h:[1,2)\xrightarrow{\sim}(0,3)$

$$h(x)=\begin{cases} x & x\in\{1,1\frac{1}{3},\ldots\}=:T \\ 3x-3 & \text{אחרת}\end{cases}$$

האם כל פונקציה מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{N}$ ניתנת לחישוב בתוכנה ספציפית?

כמה תכניות תוכנה ספציפיות יש?

תהי A קבוצה, נגדיר

לכל n: $A^n=\underbrace{A\times A\cdots\times A}_{n}$

$A^0=\{*\}$, $A^{n+1}=A^n\times A$

כלומר רצף של איברי A באורך n.

הגדרה: קבוצת הסגור של A

היא הקבוצה

$$A^* = \cup\{A^n \mid n\in\mathbb{N}\}$$

אם כל תוכנית תוכנה ספציפית כלשהי
לחשוב כעל איבר של U^* כאשר
U קבוצת כל התווים.

משפט: אם A בת מניה אז
גם A^* בת מניה.

הוכחה: מספיק לקבוע ש- $A=\mathbb{N}$

ראינו ש $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. באינדוקציה:
$\mathbb{N}\sim\mathbb{N}^k$ לכל k: נניח שזה נכון
ל-k. אז

$$\mathbb{N}\sim\mathbb{N}\times\mathbb{N}\overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\sim}\mathbb{N}^k\times\mathbb{N} = \mathbb{N}^{k+1}$$

אז $\mathbb{N}^*$ איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה

ראינו: אם $A \sim A'$, $B \sim B'$ אז

$A \times B \sim A' \times B'$, בעז' אינדוקציה $A'^n \sim A^n$

אזי במקרה הפרטי, אם $A \sim \mathbb{N}$

אזי $A^n \sim \mathbb{N}^n \sim \mathbb{N}$

ראינו בסוף ההרצאה הקודמת שאיחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה הוא קבוצה בת מנייה.

<u>משפט:</u> קבוצת התכניות בקוד ספרים היא בת מנייה.

מה עם $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ראינו ש-

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim P(\mathbb{N})$

לפי משפט קנטור, הקבוצה הנו מעוצמה יותר גדולה (לא בת מנייה).

הערה: אם X לא בת מניה ו- $A\subseteq X$ בת מניה, אז $X\setminus A$ לא בת מניה: אחרת $X=(X\setminus A)\cup A$ בת מניה.

<u>הגדרה לא נקיה לעוצמות:</u> עוצמה היא מחלקת שקילות תחת $\sim$.

לכן נגדיר בפועל, אפשר לזהות את העוצמה עם מספר קרדינלי.

את העוצמה של $\mathbb{N}$ מסמנים ב- $\aleph_0$. הוכחנו שאם $A\sim A'$ ו- $B\sim B'$ אז $A\times B\sim A'\times B'$ ו- A^B שקול ל- $A'^{B'}$ כלומר שהפעולות מוגדרות היטב על עוצמות.

כאשר α, β עוצמות, מגדירים

$\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$ ו- α^β כדלק'!

בוחרים A, B קבוצות נפרדות כך ש-

$|A|=\alpha$ ו- $|B|=\beta$ ואז $\alpha+\beta=|A\cup B|$

$\alpha\cdot\beta=|A\times B|$ ו- $\alpha^B=|A^B|$.

למשל, $\aleph_0^{\aleph_0}$ העוצמה של

$P(\mathbb{N})$.

קנטור-ברנשטיין: $\leq$ מגדיר סדר

חלקי על עוצמות.

$A\sim B \Rightarrow$

$P(A)\sim P(B)$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad \aleph_0 \quad \aleph \quad 2^{\aleph_0} \quad 2^{2^{\aleph_0}} \cdots$

$\aleph_0$: $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^{\infty}$, $\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}^*$

$2^{\aleph_0}$: $P(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$

$2^{2^{\aleph_0}}$: $P(\mathbb{R})$

טענה: לכל קבוצה אינסופית X יש העתקה חח"ע מ-$\mathbb{N}$ ל-X.

הוכחה: נבחר איבר כלשהו $x_0 \in X$

נגדיר ברקורסיה $f:\mathbb{N} \to X$

$f(0) = x_0$

$f(n+1) =$ איבר ב-X שלא שייך ל- $f[\mathbb{N}^{<n+1}]$

כדי לעשות זאת צד מדויק, נשתמש

ב- $C = \{A \subseteq X \mid A \text{ סופית}\}$

כיוון ש-X אינסופית, $X \notin C$.

לכן לכל $A \in C$, $X \setminus A$ לא ריקה

מאקסיומת הבחירה, יש פ' $g: C \to X$

כך ש: $g(A) \notin A$ לכל $A \in C$.

סכום, ההגדרה הרקורסיבית

$f(0)=x_0$

$f(n+1)=g(f[\mathbb{N}^{<n+1}])$

לפי הנחה: לכל $m<n$ מתקיים

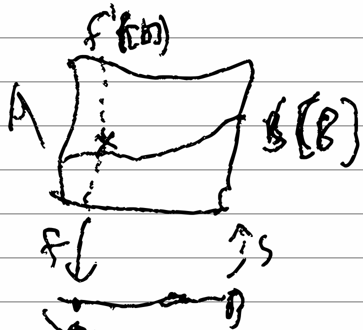
מתקיים ולכן $f(n)=g(f[\mathbb{N}^{<n}])\in X\setminus f[\mathbb{N}^{<n}]$

בפרט $f(n)\neq f(m)$, ■

תזכורת: אקסיומת הבחירה אומרת:

אם $f:A\to B$ על, אז יש

$s:B\to A$ כך ש- $f\circ s=id_B$



תרגיל: שלושת הטענות שקולות:

1. אקסיומת הבחירה

2. לכל קבוצה C של קבוצות לא ריקות, יש פונקציה $f:C\to\cup C$ כך ש- $f(A)\in A$ לכל $A\in C$

3. לכל יחס שקילות יש מערכת נציגים:

אם E יחס שקילות על A,
מערכת נציגים היא תת-קבוצה
$A_0 \subseteq A$ כך שלכל $b \in A$ יש $a \in A_0$
יחיד עבורו bEa.

<u>הערות:</u>

1. מאקסיומת הבחירה נובע להראות שהסדר על העוצמות הוא קווי.
2. השערת הרצף: אין עוצמות בין $\aleph_0$ ל-$2^{\aleph_0}$.
3. נניח $f: A \to B$ - פ' על-.
האם $B \leq A$? האם יש פ' חח"ע מ-B ל-A? אקסיומת הבחירה אומרת שכן. (שאלה פתוחה בלי)

מסקנה: לכל קבוצה אינסופית X

וקבוצה בת מנייה A , $A\cup X \sim X$

(במונחים של חשבון עוצמות ,

$\aleph_0+\alpha=\alpha$ לכל עוצמה אינסופית α).

הוכחה: נבחר פ' חח"ע

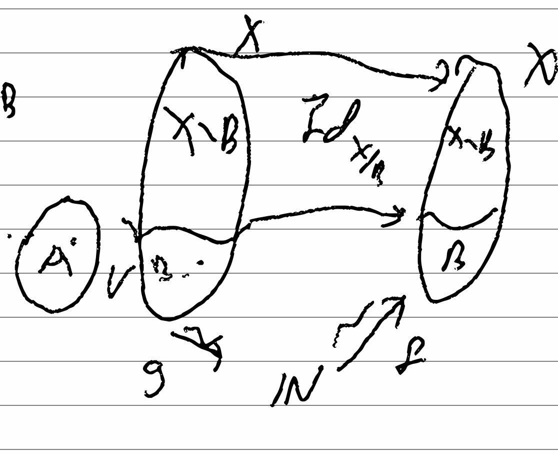
$f:\mathbb{N}\to X$

נגדיר $B=f[\mathbb{N}]$. כזו"א –

$A\cup B$ בת מנייה, אז יש פ' הפיכה $g:A\cup B\to\mathbb{N}$, נגדיר

$h:A\cup X\to X$ ע"י

$f\circ g\cup Id_{X\setminus B}$

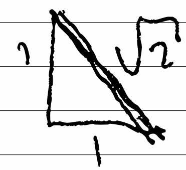


מה זה ממשיים?

למה Q לא מספיק?

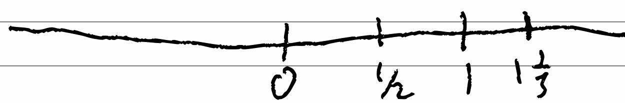
כי ב-Q אין שורש ל-2

למה צריך להיות שורש ל-2?



רעיון: הממשיים (הקווים) מייצגים אורכים של קטעים, כלומר מתאימים את נקודות ה ישר שלנו.

קובעים ישר ומסמנים שתי נקודות 0,1



זה מאפשר לשבת את Q בתוך הישר.

על הממשיים יש יחס סדר, שנתון על ידי האורך, ופעולת חיבור שנתונה על ידי חיבור את' קטעים אחד אחרי השני וכפל (ע"י דמיון משולשים), ומקיימים את הסדר, חיבור והכפל כמו ב-$\mathbb{Q}$.

ב-$\mathbb{Q}$, אין שורש ל-2 וב-$\mathbb{R}$ יש,

אבל, יש רצף C של כרצוות ל-$\sqrt{2}$ ב-$\mathbb{Q}$! לקבוצה

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$$

יש חסם עליון ב-$\mathbb{R}$, שהוא $\sqrt{2}$.

הגדרה: מודל של הממשיים הוא קבוצה סדורה שמכילה את $\mathbb{Q}$ עם פעולות $\cdot, +$ עם התכונה:

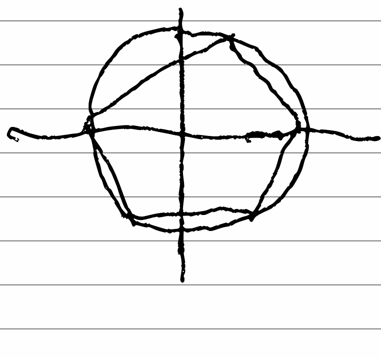
(אקס') לכל תת-קבוצה חסומה ולא ריקה יש חסם עליון.

חסם עליון של קבוצה A הוא
המינימום של $\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq y$ לכל $y\in A\}$

דוגמה: $\sqrt{2}$ החסם העליון של
$\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2<2\}$

מחר: נראה שהממשיים יוגדרו
ובנוסף תשמורנה ונמשיך את התכונות
שלהם.

דוגמה: 2π הוא ההיקף של
מעגל ברדיוס 1.



π החסם העליון של
$\{a \mid a$ היקף של מצולע משוכלל שחסום במעגל$\}$

ממשיים מודל של הממשיים: קבוצה ועם

$(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq) \subsetneq (\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$

שלמות: לכל תת-קבוצה לא ריקה וחסומה של $\mathbb{R}$ יש חסם עליון.

ב- $\mathbb{Q}$, הקבוצה $A=\{r\in\mathbb{Q} \mid r^2 \leq 2\}$

חסומה לא ריקה וחסומה (למשל ע"י 2) אבל אין לה חסם עליון. החסם העליון של הקבוצה הזו הוא שורש 2. אבל ב- $\mathbb{Q}$ אין שורש ל-2. (תרגיל: אם r רציונלי ו- $r^2<2$ אז יש t רציונלי $r<t$ כך ש- $t^2<2$)

טענה: (ארכימדיות) אם R מודל

אז הממשיים ו- $x\in R$ אז יש $r\in Q$

כך ש- $x<r$.

הוכחה: נסתכל בקבוצה

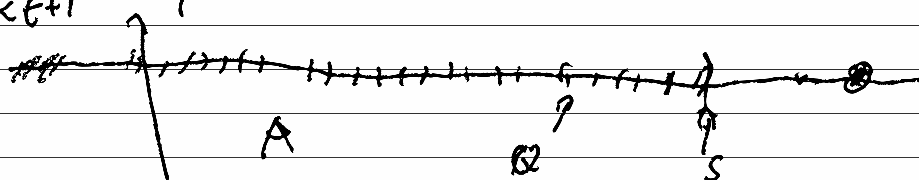
$A=\{x\in R \mid x<t \text{ עבור } t\in Q \text{ יש}\}\supseteq Q$

אם $A\neq R$ אז כל איבר ב- $R\setminus A$

חוסם את A.

נניח $s-1<t$

$s<t+1$



לפי האקסיומה, יש ל- A חסם

עליון, s. אז $s\geq t$ לכל $t\in Q$

ובפרט גם $s-1\geq t$ לכל $t\in Q$

אבל זה ו- $s-1$ חוסם את A כי

אם $x\in A$ אז יש $t\in Q$ כך ש- $x<t$

ובפרט ~ $t<s-1$. ■

משפט: צפיפות הרציונליים של $\mathbb{R}$

מוכל את הממשיים אז לכל $x<y$ ב-$\mathbb{R}$

יש $t\in\mathbb{Q}$ כך ש- $x<t<y$

הוכחה: מקרה פרטי: $x=0$. מכאן $y>0$ אז

אז $\frac{1}{y}\in\mathbb{R}$. לפי הטענה הקודמת

יש $s\in\mathbb{Q}$ כך ש- $0<\frac{1}{y}<s$

אז $0<\frac{1}{s}<y$.

מקרה כללי: לפי המקרה הפרטי

יש $t_0\in\mathbb{Q}$ כך ש- $0<t_0<y-x$

נסתכל בקבוצה

$$\{k\in\mathbb{N} \mid kt_0\le x\}$$

זו קבוצה לא ריקה וחסומה של $\mathbb{N}$

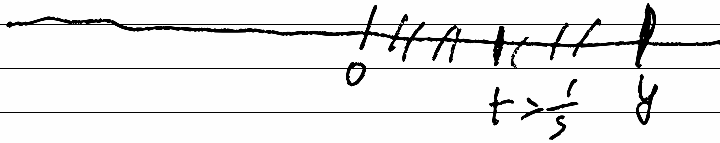
אז יש לה מקסימום n. אז

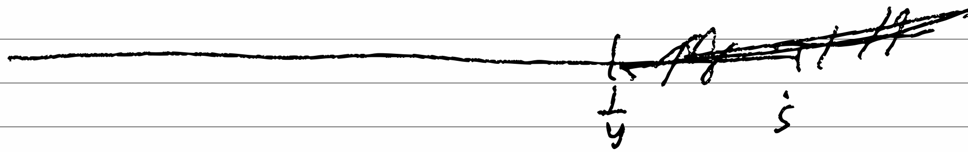
$nt_0\le x$ אבל $x<(n+1)t_0$

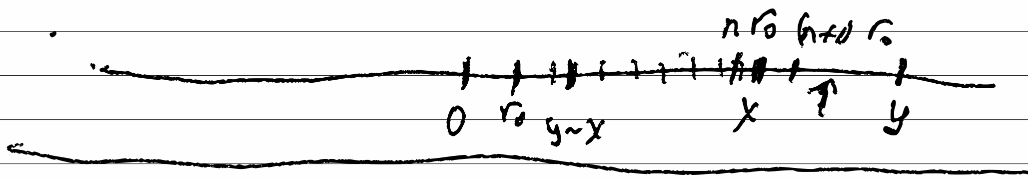
ולכן $(n+1)t_0=nt_0+t_0<x+y-x=y$

ו- $(n+1)t_0\in\mathbb{Q}$ אז הוא מקיים את

הדרישה.







<u>מסקנה:</u> אם $\mathbb{R}$ מוכל ב הממשיים

1- $x\in\mathbb{R}$ אזי $x=\sup\{t\in\mathbb{Q} \mid t\le x\}$

<u>הוכחה:</u> נסמן $s=\sup\{t\in\mathbb{Q} \mid t\le x\}$,

כיוון ש-x חסם מלעיל של הקבוצה, $s\le x$. אם $s<x$ אזי יש t כך $s<t<x$

בסתירה לכך ש-s חסם ■

לכל $x\in\mathbb{R}$, נסמן $C_x=\{t\in\mathbb{Q} \mid t\le x\}$

(החתך של x)

<u>טענה:</u> אם R_1, R_2 מודלים של הממשיים אזי יש פ' יחידה $f: R_1 \to R_2$ כך ש:

א, f שומרת סדר! אם $a <_1 b$ אזי $f(a) <_2 f(b)$

<u>ב,</u> $f(t)=t$ לכל $t \in \mathbb{Q}$

ינבע מזה, f הפיכה ושומרת גם על פעולות החשבון.

<u>הוכחה:</u> לכל $a \in R_1$ נגדיר

$$f(a) = \sup_{R_2} C_a$$

C_a היא קבוצה של הרציונליים של וכן אפשר לחשוב עליה כתת־קבוצה של R_2. C_a חסומה ב-R_2 כי ב-R_1 יש רציונלי $a < t$ וזה t חסם.

אומת C_a. אם $a <_1 b$ אזי $C_a \subseteq C_b$ ולכן $f(b) \geq_2 f(a)$. יותר מזה כי רציונלי $a <_1 q <_1 b$, אז $f(b) \geq_2 q \geq_2 f(a)$.

כי לכל $a \in \mathbb{Q}$ אז a הוא

המקסימום של C_a אז $\sup C_a = a$

והרציפות של f רציפה שלכל

$a \in R_1$, $a = \sup C_a$. כי f_1, f_2

הן פ' שומרות סדר ויו הן

שומרות את $\sup$, אז לכל

$a \in R_1$

$$f_1(a) = f_1(\sup C_a) = \sup f_1[C_a] = \underbrace{\sup C_a}$$

ובאותו דבר עבור f_2 אז $f_1 = f_2$

מסקנה: נפעיל זאת הן עם עבור

R_1, R_2, ונקבל $g: R_2 \to R_1$ שומרת

סדר ונעבור על $\mathbb{Q}$, הרכבה

$g \circ f: R_1 \to R_1$ נותנת הרחבה של הזהות

של R_1 גם שהיחידה זאת

היא הזהות הלא אז מיחידות

$g \circ f = Id_{R_1}$

האם קיים מודל של הממשיים?

רעיון: נגדיר את הממשיים להיות

הקבוצה של חתך $\{C_a|\}$. צריך להגדיר

״חתך״ בלי לדבר על a. נשים

לב: $a<b$ אם ורק אם $C_a \subset C_b$

נסמן ב-$\mathbb{R}$ את המודל של

הממשיים (יחיד עד כדי העתקה

שומרת סדר יחידה). מהי העוצמה

של $\mathbb{R}$?

<u>טענה:</u> $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$ ($\mathbb{R} \precsim P(\mathbb{N})$):

<u>הוכחה:</u> ראינו ש- הפונקציה

$f(a)=C_a \subseteq \mathbb{Q}$

היא חח״ע מ- $f:\mathbb{R} \to P(\mathbb{Q}) \sim P(\mathbb{N})$:

נניח ש- $a<b$. אז יש רציונלי $a<t<b$

אז $t \in C_b$ אבל $t \notin C_a$

$C_a=\{s\in\mathbb{Q} \mid s \leq a\}$

מכאן, $C_a \neq C_b$

בכיוון השני, נמצא פ' חח"ע מ-

$P(\mathbb{N})$ ל- $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$.

פיתוח עשרוני: $0.a_1a_2a_3\ldots =$

$$\sup\left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{10^i} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$$

האם הפיתוח העשרוני של מספר

ממשי קיים, ובפרט הוא יחיד?

דוגמא:

$$0.999\ldots =$$

$$\sup\left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{9}{10^i} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\} =$$

$$\sup\left\{ \frac{9}{10} \cdot \frac{1-\frac{1}{10^k}}{1-\frac{1}{10}} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\} = \sup\left\{ 1-\frac{1}{10^k} \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= 1 = 1.0\ldots0$$

למה? לכל k, $1-\frac{1}{10^k} \leq 1$ ולכן 1 חסם.

נניח ש- x גם חסם. אזי $1-\frac{1}{10^k} \leq x$

לכל k,

אם $0 \le 1-x \le \frac{1}{10^k}$ לכל k אז

$1-x=0$ כלומר $x=1$.

<u>טענה:</u> אם x מספר ממשי המקיים $0 \le x \le t$ לכל רציונלי $0<t$ אז $x=0$.

<u>הוכחה:</u> אם לא, אז $0<x$ ולכן יש רציונלי $0<r<x$ בסתירה להנחה.

<u>הערה:</u> לכל רציונלי חיובי t יש k טבעי כך ש $\frac{1}{10^k}<t$.

באותו אופן, $0.12399\ldots=$

0.124

זה המקרה היחיד לאי יחידות.

נגדיר פונקציה $g:\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$

המוגדרת ע"י

$$g(u) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{k} \frac{u(i)}{10^i} \;\middle|\; k\in\mathbb{N}\right\}$$

נוכיח ש g חח"ע! נניח ש

$u,v\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ הן שונות. נסמן

$$k = \min\{i\in\mathbb{N} \mid u(i)\neq v(i)\}$$

בלי הגבלת הכלליות, $u(k)=0$ ו-$v(k)=1$

אז נראה $g(v) > g(u)$:

$$g(v) \ge \sum_{i=0}^{k} \frac{v(i)}{10^i} = \frac{v(k)}{10^k} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1}\frac{v(i)}{10^i}}_{a} = \frac{1}{10^k}+a$$

ובנוסף עבור u הוא a.

לכן

$$g(u) \boxed{\le} a + \frac{2}{10^{k+1}} < \frac{1}{10^k}+a$$

הערה:

$0.11\ldots < 0.2$

$$0.11\ldots = \sup\left\{\frac{1}{10}\cdot\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{10^i} \;\middle|\; k\in\mathbb{N}\right\} =$$

$$\sup\left\{\frac{1}{10}\,\frac{1-\frac{1}{10^k}}{1-1/10} \;\middle|\; k\in\mathbb{N}\right\} =$$

$$\frac{1}{9}\cdot\underbrace{\sup\left\{1-\frac{1}{10^k} \;\middle|\; k\in\mathbb{N}\right\}}_{1} = \frac{1}{9}$$

מסקנה: $|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$

$\sqrt{2}$: פתרון של המשוואה $x^2-2=0$

הגדרה: אלגברי $a\in$ $\mathbb{R}$ אם

קיים לא 0 פולינום $P(x)$

מקדמים ב- $\mathbb{Q}$ כך ש- $P(a)=0$.

שאלה: האם כל הממשיים הם אלגבריים?

טיוטה: קבוצת המספרים
הזוגיים היא בת מניה.