# שיטות הקירובים

Walter Gautschi

- אלגברה לינארית: ניסיון לפתור משוואות, למצוא ערכים עצמיים, ...
- $f(x)=0$ , $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

  $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
- אינטרפולציה: נתונות נקודות וערכים בנקודות האלה, למצוא פונקציה נחמדה שולה השפעה:
- קירוב פונקציות: קירוב פונקציה לשונו פונקציה שקרובה אליה מסוג מסוים (למשל פולינום).

- בהמשך בוחן
- משוואות דיפרנציאליות

## חישובים נומריים

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* \subseteq \mathbb{R}$ סופיים - מספרים שאפשר לייצג

$x \in \mathbb{R}$, יש לו קירוב $x^* \in \mathbb{R}^*$, $0 \in \mathbb{R}^*$

$0^* = 0$.

$\frac{|x - x^*|}{|x|}$ - דיוק יחסי.

אנו צריכים לחשב את $f(x)$

איך הוא הדיוק של x מול לקשיר

של תוצאות הראשוק?

$x, x^*$ , $f(x)$ , $f^*(x^*) = f(x')$

עבור $x'$ המק"מ $|x'-x| \le |x^*-x|$

$$\left|\frac{f^*(x^*)-f(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x')-f(x)}{f(x)}\right| =$$

$$\left|\frac{(f(x')-f(x))(x'-x)\cdot x}{(x'-x)\cdot x\, f(x)}\right| \le \frac{|x^*-x|}{|x|}\cdot$$

$$\left|\frac{(f(x')-f(x))\cdot x}{(x'-x)\cdot f(x)}\right| \approx \underline{\left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right|}\cdot\frac{|x^*-x|}{|x|}$$

**הגדרה:** מספר המצב של $f$

ב- $x$ (condition number) הוא

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|$$

(אם מוגדרת ב- $x, f(x) \neq 0$)

**דוגמא:** $f(x) = ax + b$,

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \left| \frac{x \cdot a}{ax+b} \right| = \left| 1 - \frac{b}{ax+b} \right|$$

**דוגמא:** חישוב עבור כל $n$

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\, dt$$

חשב את הערך

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{t+5} = \ln(t+5) \Big|_0^1 = \ln\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{\boxed{t^{n+1}}}{t+5}\,dt = \int_0^1 t^n \cdot \frac{t+5-5}{t+5}\,dt =$$

$$\underbrace{-5\int_0^1 \frac{t^n}{t+5}\,dt}_{I_n} + \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \underline{\underline{-5 I_n + \frac{1}{n+1}}}$$

$$I_n = f_n(I_0) \qquad \underline{f_n(x) = (-5)^n x + b_n}$$

כאשר $b_n \in \mathbb{R}$ כלשהו

$$\operatorname{cond}(f_n)(I_0) = \left| \frac{I_0 \, f_n'(I_0)}{I_n} \right| =$$

$$5^n \cdot \left| \frac{I_0}{I_n} \right| \gtrsim \underline{\underline{5^n}}$$

$$I_n = \frac{I_{n+1} - \frac{1}{n+1}}{-5}$$

$k >> n$

$n-k < 0$

$$I_n = g_n(\underline{I_k})$$

$$g_n^{(k)} = (-5)^{n-k} x + c_n$$

$$\operatorname{cond}(g_n)(I_k) = \left| \frac{I_k \cdot -5^{n-k}}{I_n} \right| =$$

$$5^{n-k} \left| \frac{I_k}{I_n} \right| \leq \underline{\underline{5^{n-k}}}$$

$\approx 1$

## שגיאות במימד גבוה.

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^*, \dots, x_n^*)$$

**הגדרה:** יהא $V$ מרחב ליניארי

מעל $\mathbb{R}$, נורמה על $V$ היא

פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ש- $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

1. אם $\|v\| = 0$ אז $v = 0$
2. לכל $a \in \mathbb{R}, v \in V$ $\|a v\| = |a| \cdot \|v\|$
3. לכל $u, v \in V$ $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

מרחב לינארי $V$ ביחד עם נורמה

נקרא **מרחב נורמי**

דוגמאות: $V=\mathbb{R}^d$, ולכל $1 \le p \in \mathbb{R}$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_p = \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$$

(תרגיל: נורמה)

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_1 = \sum |x_i|$$

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$$

"$p=\infty$"

$$\|\langle x_1,\dots,x_d\rangle\|_\infty = \sup\{|x_i|\}$$

בהינתן נורמה $\|\cdot\|$ על $V$,

מטריקה על $V$:

$$d(u,v)=\|u-v\|$$

אם $v_i \in V$ סדרה, $(v_i)$ מתכנסת

ל-$v$ אם $\|v_i - v\| \to 0$.

**טענה:** יהי $V$ מרחב וקטורי עם
שתי נורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$
אז שני התנאים הבאים שקולים
1. לכל סדרה $(v_i)$ ו-$v \in V$
$\|v_i - v\|_1 \to 0$ אמ"מ $\|v_i - v\|_2 \to 0$
2. יש קבוע $c > 0$ כך שלכל
$v \in V$, $\frac{1}{c}\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le c\|v\|_1$

**עובדה:** כל הנורמות על $\mathbb{R}^d$
הן שקולות.

מכאן: לכל נורמה $\|\cdot\|$ על $\mathbb{R}^d$

ולהגדיר את הדיוק היחסי

ע״י $\frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$

נניח ש $T: U \to V$ העתקה

לינארית ובנוסף נורמות $\|\cdot\|_U$

של $U$ ו- $\|\cdot\|_V$ של $V$.

רוצים לחשב את ההשפעה של

הפעלת $T$ על הדיוק היחסי:

$$\frac{\|Tx^*-Tx\|_V}{\|Tx\|_V} = \frac{\|T(x^*-x)\|_V}{\|T(x)\|_V} =$$

$$= \frac{\|T(x^*-x)\|_V \cdot \|x^*-x\|_U \cdot \|x\|_U}{\|T(x)\|_V \, \|x^*-x\|_U \, \|x\|_U} \le \frac{\|T\| \cdot \|x\|_U}{\|Tx\|_V} \cdot \frac{\|x^*-x\|}{\|x\|}$$

תהי $T: V \to U$ העתקה לינארית

בין שני מרחבים מנורמים, נגדיר

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_U}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V = 1} \|T(x)\|_U$$

ההעתקות הלינאריות $\underline{Hom(V,U)}$

המנורמת. $\|T\| \to T$ נורמה

במרחב הזה

נגדיר מספר המצב של $T$

בנקודה $x$ הוא

$$\underline{\underline{cond(T)(x)}} = \frac{\|x\| \cdot \|T\|}{\|T(x)\|}$$

אם $T$ הפיכה, ונרצה לפתור $T^{-1}(y) = x$

$\mathrm{cond}(T) :=$

$$\left.\sup_x \mathrm{cond}(T)(x) = \|T\| \cdot \|T^{-1}\|\right\} \text{ גדול.}$$

שית ורעש לפתור משוואה

$Tx=b$, מה השגיאה היחסית

שמתפשטת עקב הקירוב של $b$

על ידי $b^*$?

<u>מטריצת הילברט!</u>

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

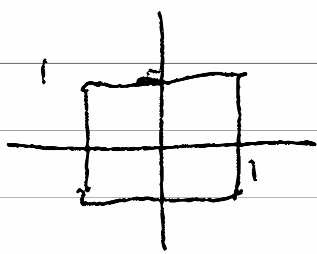
$$\mathrm{cond}_2 T_n = \underbrace{\frac{(\sqrt{2}+1)^{4n+4}}{2^{15/4}\cdot\sqrt{\pi n}}}$$

$T: U \to V$ העתקה לינארית

$U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

אם $T$ מיוצגת על ידי

מטריצה $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$.




$$\|T\| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{cond}(f)(x) = \frac{|x|\,|f'(x)|}{|f(x)|}$$

$x = 17$

$y = -17 + \varepsilon$

$2 \cdot 17 = 34$

$T: U \to V$ . $V, \|\cdot\|$

$$\|T\| = \sup_{|u|=1} \|Tu\|$$

$$\text{cond}(T)(u) = \frac{\|u\| \cdot \|T\|}{\|Tu\|} \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T\|$$

$\|$

$\text{cond}(T)$

---

[1.1] $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ שאלה 3

$f(x,y) = x + y$

$$\text{cond}(f)(x,y) = \frac{\|\langle x,y\rangle\| \cdot \|f\|}{|x+y|} = \frac{\max(|x|,|y|) \cdot 2}{(x+y)}$$

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$

2. $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x^* \in \mathbb{R}^{*n}$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\|f(x^*)-f(x)\|}{\|f(x)\|} =$$

$$\frac{\|f(x^*)-f(x)\| \cdot \|x\| \cdot \|x^*-x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x\| \, \|x^*-x\|} \approx \qquad = \varepsilon$$

$$\frac{\|df(x)(x^*-x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\| \cdot \|x^*-x\|} \cdot \varepsilon \le \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|} \cdot \varepsilon$$

הגדרה:

$$\operatorname{cond}(f)(x) = \frac{\|df(x)\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\|}$$

דרך נוספת: לתאר את $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

כ-$m$ פ' $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

לחשב את השגיאה היחסית של

$f_i$ לפי כל $x_j$. מקבלים

מטריצה

$$\left(\mathrm{cond}_{x_j}(f_i)\right)_{ij}$$

<u>דוגמא:</u> $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$$

$$df=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2}\\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{y^2}\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cond}(f)(x,y) = 2 \cdot \frac{\max(|x|,|y|) \cdot \max\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}\right)}{\max\left(\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|, \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\right)}$$

$$f_1(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

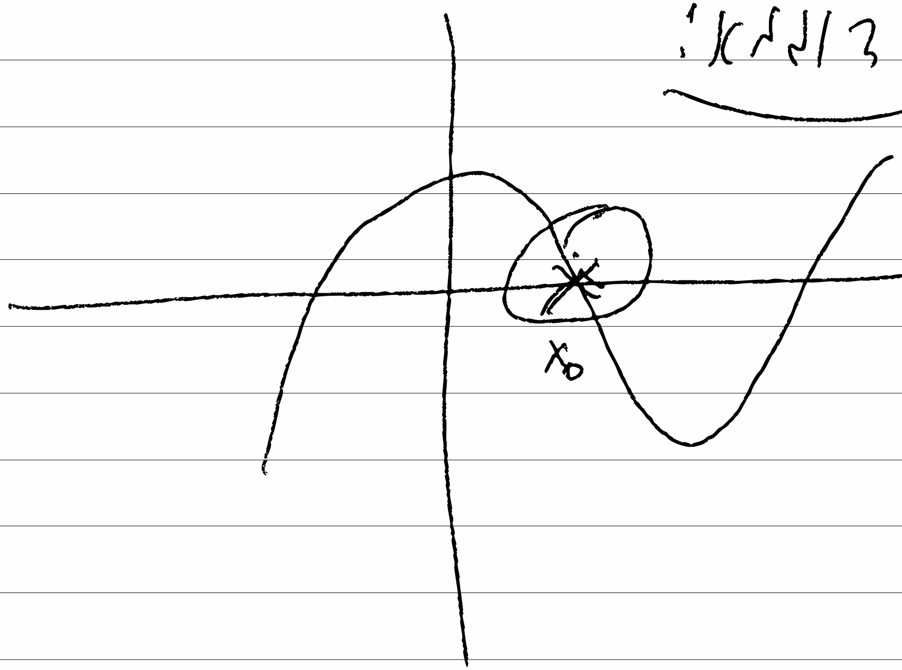
$$\operatorname{cond}_x(f_1) = \frac{|x| \cdot \frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|} \qquad \frac{|y| \cdot \frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right|}$$

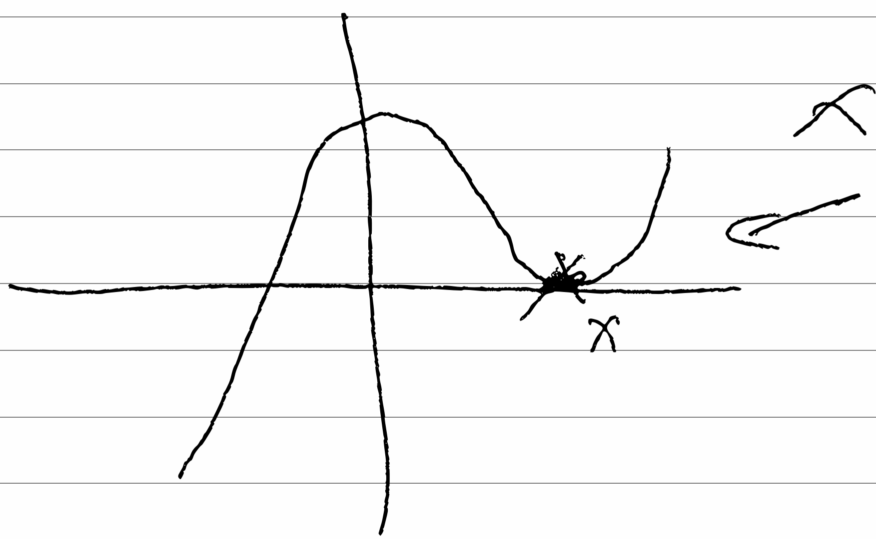
$$\shortparallel$$

$$\frac{|y|}{|x+y|} \qquad \frac{|x|}{|x+y|}$$

$$\operatorname{cond}_x(f_2) = \frac{|x| \cdot \frac{1}{x^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|y|}{|x-y|} \qquad \frac{|y| \cdot \frac{1}{y^2}}{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|} = \frac{|x|}{|x-y|}$$

דוגמא:



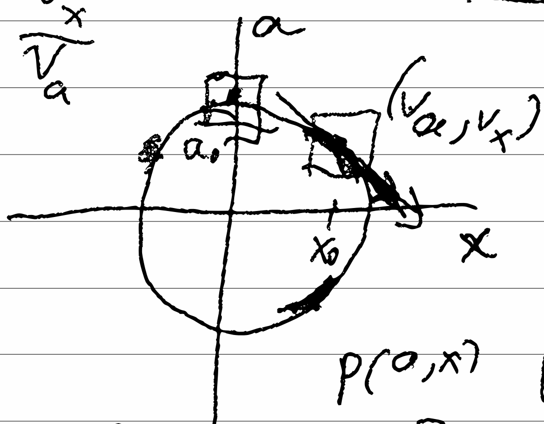
קוקצים בחלה $n$

$$P_n(\overline{a}, X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

$P_n(\overline{a^0}, \underline{x_0}) = 0$ $\qquad$ $x_0 \,,\ \overline{a^0}$

$\underline{F(x,y) = x^2 + y^2}$

$\frac{V_x}{V_a}$




$a_0 = 1$

$x = 0$

$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = 2x}$

$p(a,x)$

$a^2 + x^2 = 1$ $\qquad$ $\underline{a^2 + x^2 - 1 = 0}$

$X = X(a)$ $\qquad$ $P(a, X(a)) = 0$

$X_0 = X(a_0)$ $\qquad$ $X = \sqrt{1 - a^2}$

$$F(a, x) = 0 \qquad F(a_0, x_0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a_0, x_0) \neq 0 \Rightarrow x = x(a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial a} \Big/ \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$df \cdot \begin{pmatrix} v_a \\ v_x \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_a \\ V_x \end{pmatrix} = 0$$

$$V_a \frac{\partial f}{\partial a} + V_x \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$x = x(\bar{a})$$

$$\operatorname{cond}_{a_i}(x) = \frac{|a_i| \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial a_i}\right|}{|x|} = \frac{|a_i| \cdot |x^i|}{|x| \cdot |p'(x)|}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_i} = -\frac{\partial P / \partial a_i}{\partial P / \partial x} =$$

$$\frac{x^i}{\sum j a_j x^{j-1}} = \frac{x^i}{p'(x)}$$

הדוגמא של וילקינסון

$$p(x) = (x-1) \cdots (x-n)$$

## השגיאה הכללית:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $f^*: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

$f(x)$ $\qquad$ $f^*(x^*)$

המאגי, $f^*(x^*) = f(x')$ לווג'סקו $x'$

$$\frac{|f^*(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} = \frac{|f(x') - f(x^*) + f(x^*) - f(x)|}{|f(x)|} \leq$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} + \frac{|f(x^*) - f(x)|}{f(x)}$$

$$\frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f(x') - f(x^*)|}{|f(x^*)|} \leq$$

$$\underbrace{\operatorname{cond}(f)(x^*)}_{\operatorname{cond}(f)(x)} \cdot \boxed{\frac{|x' - x^*|}{|x^*|}}$$

נס' הרצה של האלגוריתם $f^*$

הינו

$$\operatorname{cond}(f^*)(x^*) = \inf_{f(x') = f^*(x^*)} \frac{|x' - x^*|}{|x^*|}$$

$$\operatorname{cond}(f)(x) \left( \frac{|x - x^*|}{|x|} + \operatorname{cond}(f^*)(x^*) \right)$$

# קירובים לפונקציות ואינטרפולציה

$f: X \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) פונקציה רציפה

רוצים לקרב אותה ע"י

פונקציות פשוטות,

A מרחב וקטורי של פונקציות על

מרחב "[illegible]" X. למשל

X תת-קבוצה סגורה וחסומה ב $\mathbb{R}^n$

X קבוצה סופית

$A = C(X)$ פונקציות רציפות מ-X

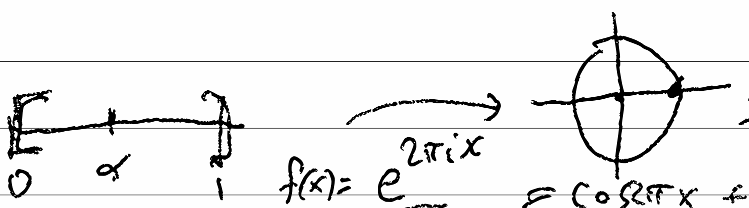
ל-$\mathbb{R}$ או ל-$\mathbb{C}$.

$P \subseteq \mathcal{U}$ תת מרחב של הפונקציות שבעזרתן מקרבים.

למשל: $P$ - פולינומים.

מה זה לקרב? למדוד את המרחק הקרוב ביותר ב-$P$ לפונקציה $f \in A$ ביחס לנורמה נתונה $\|\cdot\|$ על $A$.

יהי $X =$ המעגל; הקטע $[0,1]$ עם זיהוי של 1 ו-0.




$f(x) = e^{2\pi i x}$ $= \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ $\subseteq \mathbb{C}$

ו. מרחב מעל $\mathbb{C}$ נפרש ע"י

$\cos(2\pi nx)$ ו- $\sin(2\pi nx)$ הם וגלגלה
$n\in\mathbb{Z}$

(סלר ומת כפל)

$\{e^{2\pi i n x}\}$

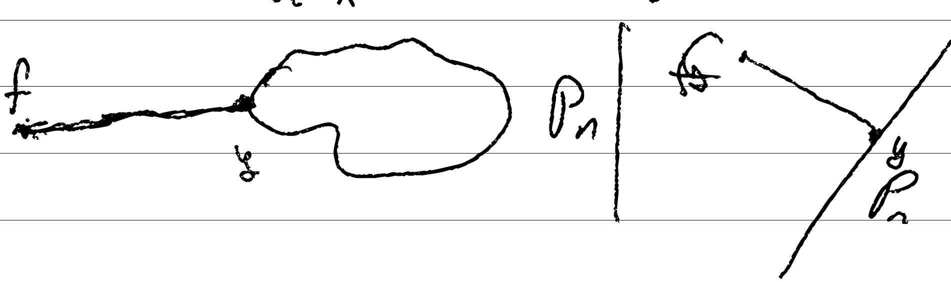
$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \dots \qquad P=\bigcup P_i$

תת' מרחב'ם ממ'מד סופ'. רציפים:

לכל $f\in A$ ולכל $\varepsilon>0$ יש $n$

כך ש- $d(f,P_n)<\varepsilon$

$$d(f,P_n)=\inf_{y\in P_n} d(f,y)=\inf_{y\in P_n}\|f-y\|$$



על $C(X)$ יש נורמה טבעית

נורמת הסופרימום:

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

<u>משפט סטון-ויירשטראס:</u> אם $P \subseteq C(X)$ תת-אלגברה (סגורה תחת כפל, מכילה את הפונקציות הקבועות) ולכל $x \neq y$ יש $p \in P$ כך ש- $p(x) \neq p(y)$ ($P$ "מפרידה נקודות") אז <u>$P$ צפופה ב-$C(X)$</u>

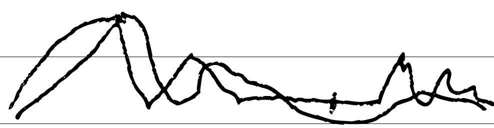
<u>דוגמא:</u> $X=[a,b]$ ו-$P$ פולינומים במשתנה אחד. אז $P \subseteq C(X)$ תת-אלגברה מפרידה נקודות ולכן צפופה

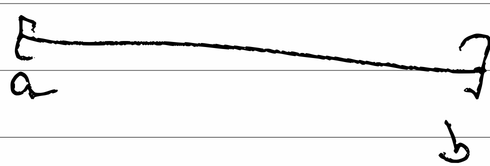
P צפופה ב-$C(X)$: לכל $f\in C(X)$

ולכל $\varepsilon>0$ יש $p\in P$ כך ש-

$\|f-p\|<\varepsilon$

כלומר לכל $x\in X$ $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.






במקרה המרוכב, P צריכה להיות

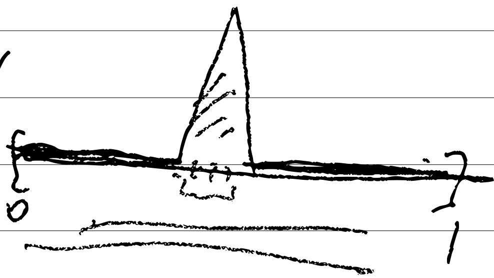
סגורה תחת הצמדה

דוגמא: כל פונקציה רציפה

ב הממשי אפשר לקרב ע"י

פונקציות טריגונומטריות

סוף

$\sup\Big($  $\Big) = 1$

אז לכל $1 \le p$ יש נורמה $\|\cdot\|_p$

$\|\bar{x}\|_\infty = \max(|x_i|)$

$\|\bar{x}\|_p \stackrel{def}{=} \sqrt[p]{\sum |x_i|^p}$ $\quad 1 \le p < \infty$

טענה X קבוצה סופית נורמת
הסופרימום ביחס $\|\cdot\|_\infty$

נניח ש- X סופית אז מקבלה
קרבציה של $\mathbb{R}$ עם סופרים ב-$\mathbb{R}^n$.
(כזו מרחב סופי קומפקטי מימד סופי)

נגדיר $\|\cdot\|_2 : C(X) \to \mathbb{R}$

(נורמת $L_2$).

על ידי

$$\|f\|_2 = \sqrt[2]{\int_X |f|^2}$$

אם $X=\{1,\dots,n\}$ רק נק׳ים.

זאת הנורמה $L_2$ הקודמת

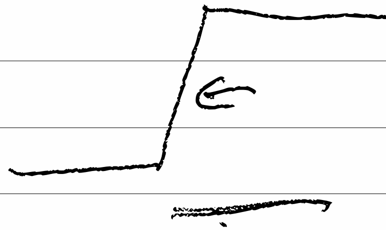
באופן יותר כללי, אפשר לקבוע

פונקציה חיובית $w : X \to \mathbb{R}$ ולהגדיר

$$\|f\|_{w,2} = \sqrt[2]{\int_X |f|^2 \cdot w}$$

$$\|f\|_2^2 = \int_X |f|^2 \le \sup_X |f|^2 \cdot \boxed{\int_X 1} =$$

$$\|f\|_\infty^2$$

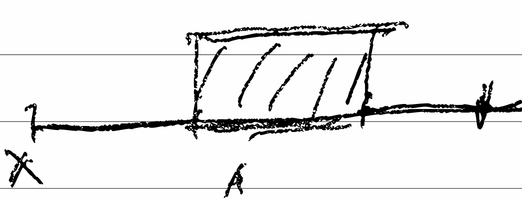


הרי ורציפות רציפות לגבי

האינטגרלים.

$X \qquad f: X \to \mathbb{R}$

$A \subseteq X \qquad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$



$\int_X 1_A =$ המדה של $A$

בקבוצה סופית $X$ ספירת נקודות נותנת מידה (—)

$f: X \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $\underline{\int_X f = \sum_{x\in X} f(x)}$

ה־$n$ $\qquad$ $f: X \to \mathbb{R} \Leftrightarrow X = \{1, \dots, n\}$

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |f(i)|^p}$$

---

יהי $V$ מרחב וקטורי מעל

$\mathbb{C}$ או $k=\mathbb{R}$, <u>מכפלה פנימית</u> על $V$

היא פונקציה $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to k$

כך ש:

1. לכל $u\in V$, הפ' $v\mapsto\langle v,u\rangle$

היא לינארית

2. לכל $u,v\in V$, $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

בפרט לכל $u\in V$, $\langle u,u\rangle\in\mathbb{R}$

3. אם $u\neq 0$ אז $\langle u,u\rangle>0$

תהי $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על $V$

אז הפונקציה $v\mapsto\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

היא נורמה של $V$.

במקרה הממשי, לכל $u,v\in V$

$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle=$

$\|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u,v\rangle$

הנורמה מגיעה ממכפלה פנימית

אם ורק אם

$$(u,v) \mapsto \frac{\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2}{2}$$

היא מכפלה פנימית.

עבור בכק, נורמת $\|\cdot\|_2$

על $C(X)$ היא

$$(u,v) \mapsto \int_X u\cdot\bar{v}$$

באמצעות מכפלה פנימית נגדיר

למשל זווית. בפרט, אורתוגונלי

$u,v$ הם ניצבים אם $0=\langle u,v\rangle$.

אם $v_1,\dots,v_n$ ניצבים בזוגות

אז

$$\|\sum a_i v_i\|^2 = \sum a_i^2 \|v_i\|^2$$

(הוכחה של הנוסחה שראינו).

נניח ש- $A$ קבוצת הפונקציות

המוגדרות

הרציפות של $X$, ו- $P=\cup P_i$

תת-מרחב, ונתונה מכפלה פנימית

של $A$, נניח שבחרנו בסיס

$\{\pi_i\}$ ל- $P_n$ [כרוולון מתאים]

ו- $f\in A$.

$T(c_1,\dots,c_m) =$

$$\|f - \sum c_i \pi_i\|^2 = \langle f - \sum c_i\pi_i, f - \sum c_i \pi_i \rangle =$$

$$\|f\|^2 - 2\underline{\sum c_i \langle f, \pi_i \rangle} + \sum c_i c_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle$$

המינימום היחיד של $T$ מתקבל

בנקודה שבו כל הנגזרות של

$T$ לפי ה-$c_i$ הן $0$.

$$0 = \frac{\partial T}{\partial c_k} = -2\langle f, \pi_k \rangle + 2\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle$$

$$\sum c_j \langle \pi_k, \pi_j \rangle = \langle f, \pi_k \rangle$$

מקבלים מערכת משוואות

$A\tilde{c} = b$

כאשר $b_i = \langle f, \pi_i \rangle$

ו- $A = \left( \langle \pi_i, \pi_j \rangle \right)_{i,j}$

A מטריצה סימטרית וחיובית

$(x,y) \mapsto \underline{\underline{\langle x, Ay \rangle}}$ ← מכפלה פנימית המוגדרת ב-$\mathbb{R}^n$

היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$

כלומר, לכל $\bar{x} \neq 0$ אז

$\underline{\underline{\bar{x} \cdot A\bar{x} > 0}}$

כי

$\bar{x} \cdot A\bar{x} = \sum_{i,j} x_i x_j \langle \pi_i, \pi_j \rangle = \underline{\underline{\left\| \sum x_i \pi_i \right\|^2}}$

$\{\pi_i\}$ בסיס ולכן $\sum x_i \pi_i \neq 0$ אם $\bar{x} \neq 0$.

בפרט, $A$ <u>הפיכה</u> ולכן יש
פתרון למערכת.

$(\pi_i)_{i \geq 0}$

$$A = \left( \underline{\langle \pi_i , \pi_j \rangle} \right)_{0 \leq i,j \leq n}$$

$$A\bar{c} = \bar{b} \qquad \bar{b} = \langle f, \pi_i \rangle$$

<u>בדוגמה:</u> $\pi_i = t^{i}$ על $[0,1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \, dt$$

$$\langle \pi_{i+1}, \pi_{j+1} \rangle = \int_0^1 t^{i+j} \, dt = \frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{i+j+1}$$

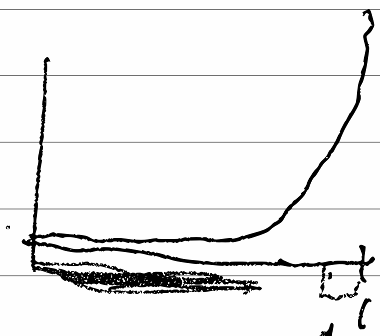
$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

קיווינו: הבעיה $H_n \bar{c} = b$

זו בעיה (טעות קטנה ב-$b$

עלולה לגרום לטעות גדולה ב-$\bar{c}$).

$t^i$ $[0,1]$




$t^i$

פתרון לעבוד עם בסיס

אורתוגונלי (או אורתונורמלי):

$\langle \pi_i, \pi_j \rangle = 0 \quad i \neq j \quad (\langle \pi_i, \pi_i \rangle = 1)$

$f = \sum \underbrace{a_i} \pi_i$

$\langle f, \pi_i \rangle = a_i \langle \pi_i, \pi_i \rangle$

---

תהליך גרם-שמידט: אם

$\pi_1, \pi_2, \dots$

שנרצה לקבל בסיס אורתוגונלי

אז יהי

$\hat{\pi}_1 = \pi_1$

$\hat{\pi}_{k+1} = \pi_{k+1} - \sum \frac{\langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2} \hat{\pi}_i$

$\langle \hat{\pi}_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle - \frac{\langle \pi_{k+1}, \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2} \langle \hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle = 0$

$P = \bigcup P_i \qquad P_0 \subseteq P_1 \subseteq \dots$

$P_i = \{$ פולינומים מדרגה $\leq i \}$

$\dim(P_i) = i$

$\mathrm{span}(\langle \pi_i \rangle_{i \leq k}) = \mathrm{span}(\langle \hat{\pi}_i \rangle_{i \leq k})$

$\hat{\pi}_i \in P_i$ | פולינום מתוקן מדרגה $i$.

$$\underline{\underline{\hat{\pi}_{i+1}}} = t\hat{\pi}_i - \alpha_i \hat{\pi}_i + \sum_{j=0}^{i-1} b_j \hat{\pi}_j =$$

$$(t - \alpha_i)\hat{\pi}_i + \beta_i \cdot \underline{\underline{\hat{\pi}_{i-1}}} + \sum_{j=0}^{i-2} b_j \hat{\pi}_j$$

$$\langle \hat{\pi}_{i+1}, \hat{\pi}_i \rangle = \langle (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle$$

$$0 \qquad \alpha_i \cdot \|\hat{\pi}_i\|^2 = \langle t\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_i \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_i \rangle}{\|\hat{\pi}_i\|^2}$$

$$\underline{0 = \langle (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle +}$$

$$\underline{\beta_i \, \|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} \quad \Rightarrow$$

$$\beta_i = - \frac{\langle t\hat{\pi}_i , \hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} =$$

$$- \frac{\langle \hat{\pi}_i , t\hat{\pi}_{i-1} \rangle}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2} = - \frac{\|\hat{\pi}_i\|^2}{\|\hat{\pi}_{i-1}\|^2}$$

$$\hat{\pi}_{i+1} = (t-\alpha_i)\hat{\pi}_i \; \underline{+} \; \beta_i \hat{\pi}_{i-1}$$

**הערה:** אם הקטע שמגדירים עליו

הוא מהצורה $[-a, a]$

והמידה היא סימטרית $W(t)=w(-t)$

$$\left[\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\cdot\overline{g(t)}\,\underline{w(t)}\,dt\right]$$

אז $\pi_k$ פ' זוגית עבור $k$

זוגי ופ' אי-זוגית ל-$k$ אי זוגי.

לכן במקרה הזה $\alpha_k=0$.

**דוגמאות:** בקטע $[-1,1]$ ומשקל 1

לז'נדר (נוסחת רודריגס)

$$\pi_k(t) = \frac{k!}{\underbrace{(2k)!}}\,\frac{d^k}{dt^k}\left(t^2-1\right)^k$$

כדי להראות ש- $\pi_k$ אורתו'

ל- $\pi_i$ עבור $i<k$, מספיק להראות

$$0=\langle \pi_k , t^i \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k \cdot t^i \, dt =$$

$$\dots = 0$$

$$\pi_0 = 1 \quad , \quad \pi_1 = \frac{1}{2}(t^2-1)' = t$$

$$\pi_2 = \left[(t^2-1)^2\right]'' \cdot \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}\cdot\left((t^2-1)^2\right)''$$

$$\pi_k = t^k + \mu_k t^{k-2} + \dots$$

$$\pi_{k+1} = t\cdot\pi_k + \beta_k \cdot \pi_{k-1} \Rightarrow \boxed{\beta_k} = \frac{\pi_{k+1} - t\pi_k}{\pi_{k-1}}$$

$$\beta_k = \mu_k - \mu_{k+1}$$

$$\mu_k = \frac{k(k-1)}{2(2k-1)} \Rightarrow$$

$$\beta_k = \frac{1}{4-k^{-2}}$$

---

<u>נושא:</u> פולינומים טריגונומטריים

נ׳ פונקציות עם מחזור 1

$\underline{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ $\quad f(t+1)=f(t)$

לכל $t$.

$$\Updownarrow$$

$f:[0,1)\to\mathbb{R}$ $\quad f(0)=f(1)$

$$i\sin(2\pi t)+\cos(2\pi t)=\underline{e^{2\pi i t}}$$

$(\Leftarrow)$

$$\int f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+a)$$

$g : S^1 \to \mathbb{C}$

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$E : [0,1] \to S^1$

$E(t) = e^{2\pi i t}$

$g : S^1 \to \mathbb{C} \rightsquigarrow g \circ E$ פ' מחזורית

$$\int_{S^1} g := \int_0^1 g \circ E \, dt$$

אם $z, w \in S^1$ אז $z \cdot w \in S^1$

נקבע $a \in S^1$ ונגדיר [illegible]

$g_a(z) = g(a \cdot z)$

אז $\int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g$

טענה: נניח ש- $g: S^1 \to \mathbb{C}^*$

מקיימת: $g(z\cdot w)=g(z)\cdot g(w)$

אזי א. אם $g(z)=1$ לכל $z$

אזי $\int_{S^1} g = 1$

ב. אחרת $\int_{S^1} g = 0$

הוכחה: א. קל

ב. יהי $a\in S^1$ כך ש- $g(a)\neq 1$

$g_a(x)=g(ax)=g(a)g(x)$

אזי

$$\int_{S^1} g = \int_{S^1} g_a = \int_{S^1} g(a)\cdot g = \underbrace{g(a)}_{\neq 1}\underbrace{\int_{S^1} g}$$

אזי $\int_{S^1} g = 0$.

לכל $n\in\mathbb{Z}$ הפ' $g_n(x)=x^n$

מקיימות את התנאים של הטענה

ו- $g_n\cdot g_m=g_{n+m}$ $\overline{g_n(x)}=g_{-n}(x)$ ו-

כעת יש להגדיר מכפלה פנימית

על $\mathbb{C}(S^1)$ ע"י

$$\langle f,g\rangle=\int_{S^1} f\cdot\overline{g}$$

כעת הוכחנו ש- $g_i$ מערכת

אורתונורמלית.

מרחב של המרחב שנפרש ע"י

ה-$g_i$ סגור תחת כפל (ותחת הצמדה).

הקבוצה הזו נקראת פולינומים טריגונומטריים.

נזכיר לגבי ש-

$$= \int_{S^1} x^n = \int_0^1 e^{2\pi i n t}\,dt = \int \cos 2\pi i n t + i \sin 2\pi n t$$

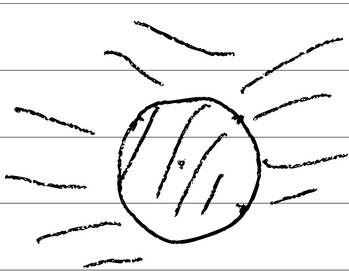
---

תרגיל:

$\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$

אם $x=y$ או $x \sim y$

$X = \mathbb{C}^*/\sim$ $\qquad g_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} \sim x^n = g_n(x)$ $\qquad x = \frac{1}{y}$



$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^* \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\bar{g}_n"] & X \end{tikzcd}$$

$\pi(x) = \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \in \mathbb{C}$

$\pi(x) = \pi\left(\frac{1}{x}\right)$

אם $z\in S^1$ אז

$\pi(z) = \mathrm{Re}(z)$

$\pi(S^1) = [-1,1] = X_0$ אז

$$\bar{g}_n\left(\overbrace{\frac{x+\frac{1}{x}}{2}}^{\pi(x)}\right) = \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2} = \pi(g_n(x))$$

אם $h$ פ' ב $X$ גזירה

$$* = \int_{X_0} h = \int_{S^1} h\circ\pi = \int_{S^1} h\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right)$$

$$\int_0^1 h(\mathrm{Re}(e^{2\pi i t}))\,dt = \int_0^1 h(\cos(2\pi t))\,dt$$

$y=\cos(2\pi t)$ $\quad dy = -2\pi\sin(2\pi t)\,dt =$

$$dy = -2\pi\sqrt{1-y^2}\,dt$$

$$x = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} h(y)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$ ס/כ

~~אז~~ ה־ $\tilde{g}_n$ נקראים פולינומי

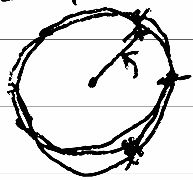
צ'בישב. הפולינומים הם משפחה

אורתוגונלית עבור

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\cdot g\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

$$\tilde{g}_n(\cos 2\pi t) = \cos 2\pi n t$$

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$



$$\boxed{\begin{array}{l} \sin 2\pi t = \sqrt{1-y^2} \\ 0 \le t \le \tfrac{1}{2} \end{array}}$$

$$\downarrow p$$

$$X = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$$

$$p(z) = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} \quad \left( = \frac{z + \bar{z}}{2} = \operatorname{Re}(z) \text{ on } S^1 \right)$$

$$f : X \to \mathbb{C}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \cos 2\pi t \\ dy = -2\pi \sin 2\pi t \, dt \end{array}}$$

$$\int_X f := \int_{S^1} f \circ p = \int_0^1 f \circ p \cdot e^{2\pi i t} \, dt =$$

$$\int_0^1 f(\cos 2\pi t) \, dt = 2 \int_0^{1/2} f(\cos 2\pi t) \, dt =$$

$$2\int_{1}^{-1} f(y)\cdot\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(y)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\varphi_n"', "x \mapsto x^n"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, bend left] & S^1 \arrow[d] \\
X \arrow[r, "T_n"'] & X
\end{tikzcd}$$

$$\varphi_n(x) = x^n$$

$$T_n\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{2}\right) = \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2}$$

$$\int_X T_n = \int_{S^1} T_n \circ p = \int_{S^1} \frac{x^n+\frac{1}{x^n}}{2} =$$

$$\begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{S^1}\varphi_n\bar{\varphi}_m =$$

$$\int\varphi_n\varphi_{-m} = \int\varphi_{n-m}$$

$$\left(T_n \cdot T_m\right)\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \left(\frac{z^n+\frac{1}{z^n}}{2}\right)\left(\frac{z^m+\frac{1}{z^m}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{z^{m+n}+\frac{1}{z^{m+n}}+z^{n-m}+z^{m-n}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(T_{n+m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)+T_{n-m}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\right)$$

$$\int T_n \cdot T_m = \frac{1}{2}\left(\int T_{n+m}+\int T_{n-m}\right) =$$

$$\int \begin{cases} 1/2 & n = \pm m \neq 0 \\ 1 & n = m = 0 \\ 0 & |n| \neq |m| \end{cases} \qquad T_n = T_{-n}$$

$T_0 = 1 \qquad T_0\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = 1$

$T_1\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \qquad T_1(z) = z$

$T_n \cdot T_1 = \frac{1}{2}\left(T_{n+1} + T_{n-1}\right) \Rightarrow$

$T_{n+1}(z) = 2z\,T_n(z) - T_{n-1}(z)$

$T_2(z) = 2z^2 - 1$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$

$\cos(nt) = T_n(\cos t)$

1. $T_n$ ממעלה $n$, המקדם של
$z^n$ הוא $2^n$

# אינטרפולציה

נתונים ערכי פונקציה $f$

במספר סופי של נקודות

$c_0, \ldots, c_n \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$

רוצים לקרב את $f$ על ידי

פולינום ממעלה $n$.

המרחב של פ׳ ממעלות על $c_0,\ldots,c_n$

ממימד $n+1$, עם בסיס

$$\delta_i(c_j) = \begin{cases} 1 & j=i \\ 0 & j\neq i \end{cases}$$

כולם ממעלה $\leq n$

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x-c_j)}{\prod_{j\neq i}(c_i-c_j)} \in P_n$$

$$f(c_i) = f_i \Rightarrow$$

$$f \sim \underline{\underline{\sum f_i \, l_i}} = \Pi_{\bar{c}}(f)$$

$$\Pi_{\bar{c}} : C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$$

$$\sup_{\|f\|=1} \|\Pi_{\bar{c}}(f)\| = \sup_{\|f\|=1} \left| \sum f_i \, l_i \right| =$$

$$= \sum_{i=0} \|l_i\|$$

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$$

$\hat{p}_n$ – הקירוב הכי טוב ל-$f$

ב-$\mathbb{P}_n$

$$\|f - \Pi_{\bar{c}}(f)\| = \|f - \hat{p}_n - \Pi_{\bar{c}}(f - \hat{p}_n)\|$$

$$\leq \|f - \hat{p}_n\| + \|\Pi_{\bar{c}}\| \, \|f - \hat{p}_n\| =$$

$$\boxed{(1 + \|\Pi_{\bar{c}}\|) \, \|f - \hat{p}_n\|}$$

**הערכת הטעות קירבת הנלכרת:**

$f$ פ' ~~רציפה~~ $\in C^{n+1}[a,b]$

(גזירה ברציפות $n+1$ פעמים)

$$(f - \Pi_{\bar{c}}(f))(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - c_i)$$

(תלוי ב-$x$)

הוכחה: יש $\xi$ שעבורו זה נכון ($f\in C^{n+1}[a,b]$)

נגדיר עבור $c_i\neq x$

$$G(t)=f(t)-\Pi_{\vec{c}}(f)(t)-\frac{f(x)-\Pi_{\vec{c}}(f)(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)}\prod_{i=0}^{n}(t-c_i)$$

האפסים של $G$ הם לפחות

$c_i$ $i=0,\dots,n$ ו-$x$.

משפט רול: ל-$G^{(n+1)}$

יש אפס $\xi$.

נגזור את $(x)$ $n+1$ פעמים:

$$G^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)! \cdot \frac{f(x) - \pi_c(f)}{\prod_{i=0}^{n}(x-c_i)}$$

נציב $t=\xi$ .

$\xi \in [a,b]$

(ויסום לבנית של $[a,b]$

רפלור וקמין $\square$ $x, c_i$)

<u>מסקנות:</u> לנסות למזער

ע"י בחירת $c^{(n)} \in [a,b]$ של נקודות

$c$ אינטרפולציה שיתן אופטימליות:

$\Pi_{c^{(n)}}(f) \to f$

עבור פונקציות $f$ מספיק

חלקות.

$$\|f-\Pi_{c^{(n)}}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \prod_i (x-c_i^{(n)})$$

$$\le \frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!}\cdot (b-a)^{n+1}$$

$M_{n+1}(f)$ חסם על הנגזרת ה-$n+1$ של $f$ ב-$[a,b]$

אנו רוצים ש-

$$\underline{\frac{M_n(f)\cdot(b-a)^n}{n!}} \to 0$$

$\bar{c}$ נקודות אינטרפולציה $c_i \in [a,b]$

$$\underline{\|f-\pi_{\bar{c}}(f)\|} \le \left\| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_i (x-c_i) \right\| \le \frac{M_{n+1}\cdot(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

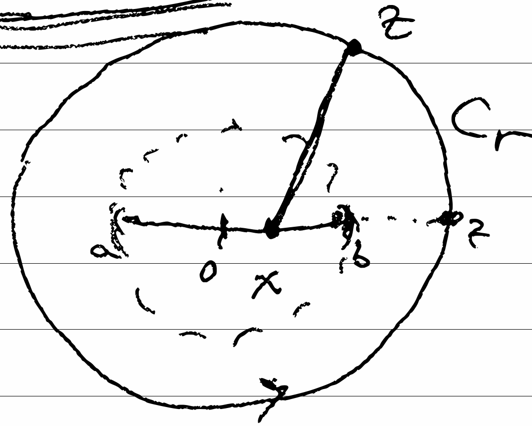
$$M_n = \|f^{(n)}\|_\infty$$

$f$ פ' מרוכבת אנליטית

נוסחת קושי: אם f אנליטית

צ/ל

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{(z-x)^{k+1}}\,dz$$




$a = -b$

$$\int_{C_r} \frac{1}{z} = 2\pi i$$

$\gamma(t) = re^{2\pi i t}$

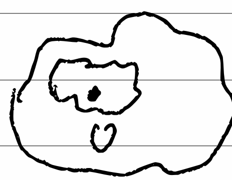
$\|z - x\| \geq r - b \implies$

$$\|f^{(k)}(x)\| \leq \frac{k!}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{\cancel{M}N}{(r-b)^{k+1}} \cdot \cancel{2\pi} r \implies$$

$$\frac{M_n \cdot (2b)^n}{n!} \le \frac{\frac{n! \cdot \cancel{M_0}^{\,M}}{(r-b)^{n+1}} \cdot r \cdot (2b)^n}{n!} =$$

$$\frac{\cancel{M_0}^{\,M} \cdot r}{r-b} \cdot \left(\frac{2b}{r-b}\right)^n \longrightarrow 0$$

$$\frac{2b}{r-b} < 1$$



$\subset \mathbb{C}$

$$r > 3b$$

$$\frac{1}{z}$$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(f \circ \gamma)'$

$\gamma: (a, b) \to \mathbb{C}$

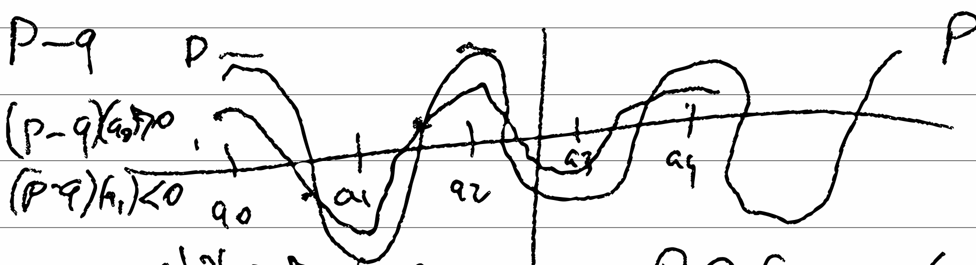
מהו הפולינום המתוקן ממעלה $n$ שסטייתו $\|\cdot\|_\infty$ (על $[-1,1]$) מינימלית?

אם $p$ פולינום מתוקן ממעלה $n$ כך ש- $\|p\|_\infty = |p(a_i)|$ עבור $n+1$ נקודות $a_i$ של $p$

$p(a_i) = -p(a_{i+1})$

הוא הפולינום עם $\|p\|_\infty$ מינימלית

אחרת, נניח ש- $\|q\| < \|p\|$




אז $p = q$ ב-$n$ נקודות.

## שרשי פולינומי צ'בישב הממשיים

שרשים את ההמה?

$$T_n(\mathrm{Re}\, z) = \mathrm{Re}(z^n)$$

$k = 0, \dots, n-1$

$x = \mathrm{Re}\, z$

$= T_n(x) = 0$

$\mathrm{Re}\, z^n$

$\Rightarrow$

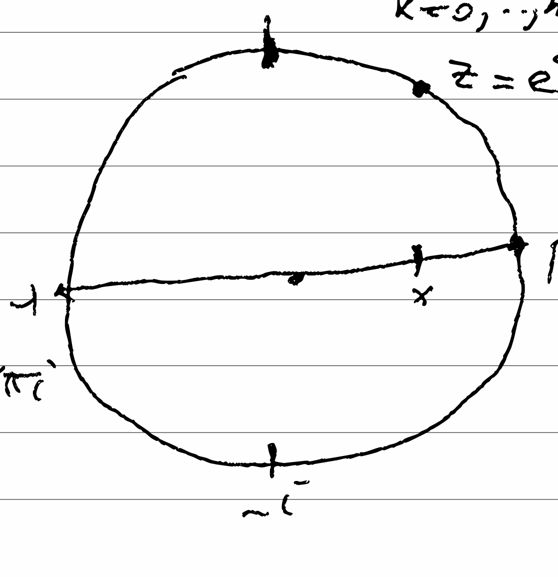
$x = \cos\left(\pi \frac{2k+1}{2n}\right)$

$z^n = \pm i$

$y = \cos\left(\pi \frac{k}{n}\right)$

$k = 0, \dots, n$

$z = e^{2\pi i t}$




$z^n = i \iff$

$e^{2\pi i n t} = i$

$2\pi i n t = \frac{\pi i}{2} + \cancel{2}k\pi i$

$\Rightarrow t = \frac{2k+1}{4n}$

המסקנה: המקדם המוביל של

$T_n$ הוא $2^{n-1}$

ע"כ $\mathring{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n$ פולי' מתוקן

ממעלה $n$, $\|\mathring{T}_n\| = \frac{1}{2^{n-1}}$ שמקבל

בנקודות $a_i = \cos(\frac{\pi i}{n})$

$n \geq i \geq 0$. עם סימנים מתחלפים

$\mathring{T}_n$ עם נורמת אינסוף

מינימלית בין הפולי' המתוקנים

ממעלה $n$ - לכן אם $\bar{c}^{(n)}$ סדרת

[illegible] של $T_n$ אז

$$\|f - \Pi_{\bar{c}(n)}(f)\| \le \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \cdot \|\mathring{T}_n\|_\infty =$$

$$\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

---

$c_0, c_1, \ldots$ סדרה אינסופית

$p_0, p_1, \ldots$ $\deg(p_i) = i$

$f_i$

$p_i$

$$p_{i+1}(x) = p_i(x) + a_{i+1} \cdot (x - c_0) \cdot \ldots (x - c_i)$$

$$a_{i+1}(c_{i+1}-c_0)\cdots(c_{i+1}-c_i) = f_{i+1} - p_i(f_{i+1})$$

$$\underline{a_{i+1}} = \frac{f_{i+1} - p_i(f_{i+1})}{(c_{i+1}-c_0)\cdots(c_{i+1}-c_i)} =$$

$$\underline{[c_0, \dots, c_{i+1}]f}$$

$$\underline{[c_0, \dots, c_{i+1}]f} = \frac{[c_0, \dots, c_i]f - [c_1, \dots, c_{i+1}]f}{c_{i+1} - c_0}$$

$$\underline{c} = c_0, \dots, c_{i+1}, \quad \hat{c}_j = c_0, \dots, \cancel{c_j}, \dots, c_{i+1}$$

$$\underline{p_{\underline{c}}}(x) = p_{\hat{c}_{i+1}} - \frac{(x-c_0)}{c_{i+1}-c_0}\left(p_{\hat{c}_{i+1}} - p_{\hat{c}_0}\right) =: q(x)$$

$S_i \quad 0 < j < i+1 \quad dc \quad |'N' \quad 33$

$$q(c_j) = f_j = P_{\hat{c}}(c_j)$$

$$q(c_0) = P_{\hat{c}_{i+1}}(c_0) = f_0 = P_{\hat{c}}(c_0)$$

$$q(c_{i+1}) = P_{\hat{c}_{i+1}}(c_{i+1}) - (P_{\hat{c}_{i+1}}(c_{i+1})) -$$

$$P_{\hat{c}_0}(c_{i+1})) = P_{\hat{c}_0}(c_{i+1}) = f_{i+1} = P_{\hat{c}}(c_{i+1})$$

$c \quad f$

$c_0 \quad f_0$

$c_1 \quad f_1 \quad [c_0, c_1]f$

$c_2 \quad f_2 \quad [c_1, c_2]f \quad [c_0, c_1, c_2]f$

$c_3 \quad f_3 \quad [c_2, c_3]f \quad [c_1, c_2, c_3]f \quad [c]f$

$c_4 \quad f_4$

$$\boxed{[c_1, c_2, c_3]f} = \frac{[c_2, c_3]f - [c_1, c_2]f}{c_3 - c_1}$$

$\bar{c} = c_0, \ldots, c_i$

$$P_{\bar{c}}(x) = \underbrace{P_{\hat{c}_i}(x)}_{i} + [\bar{c}] f \cdot \prod_{j<i} (x - c_j)$$

$$\underline{\|P_{\hat{c}}(x)} - P_{\hat{c}_i}(x)\| = \|\underbrace{[\bar{c}] f}\ \prod (x - c_j)\|$$

$$\leq \underbrace{\left| \frac{P_{\bar{c}}^{(i+1)}(\xi)}{(i+1)!} \right.} \cdot \prod (x - c_i) \|$$

$\underline{\underline{f}}$

$$\left.\begin{array}{l} c_0, c_1, \dots, c_n \\ f_0, f_1, \dots, f_n \end{array}\right]$$

$$P_{\bar{c}}(x) = [\bar{c}]f\, x^n + \dots =$$

$$[\bar{c}]f\,(x - c_0)\cdots(x - c_n) + P_{\hat{c}_n}$$

$$\hat{c}_i = \{c_0, \dots, c_n\} \setminus \{c_i\}$$

$$[\bar{c}]f = \frac{[\hat{c}_0]f - [\hat{c}_n]f}{c_n - c_0}$$

$c_0, \dots, c_n$

$f_0, \dots, f_n$

$$\bar{c} = 3\cdot[1] + [3] + 2\cdot[5]$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 3 | 5 | 5 | $c_i$ |
| 2 | 4 | 0 | 1 | 6 | 7 | |

$p(1)=2, \quad p'(1)=4, \quad p''(1)=0$

$p(3)=1, \quad p(5)=6, \quad p'(5)=7$

$$P_{\bar{c}}(x) = ([\bar{c}]f)\cdot x^{n+1} + \dots$$

$\hat{c}_i = \bar{c} - [c_i]$ [illegible] $c$ [illegible] $[c_i]$

$\bar{c} = \sum n_i [c_i] \quad \deg(\bar{c}) = \sum n_i = n$

הגדרה: אם $c_i \neq c_j$ אז

$$\underline{[\bar{c}]f} = \frac{[\hat{c}_i]f - [\hat{c}_j]f}{c_j - c_i}$$

הערה:

$$\bar{c} = \sum_{k=1}^{m} n_k [c_k]$$

$$n = \deg(\bar{c}) = \sum n_i$$

אינדוקציה על $N(\bar{c}) = n-m$

אם $n-m>0$ אז יש $n_k>1$

$$d = d_\varepsilon = \bar{c} - [c_k] + [c_k+\varepsilon]$$

אם $\varepsilon>0$ מספיק קטן אז

$$N(d) < N(\bar{c})$$

מוטיבציה

$$[d]f = \frac{[\hat{d}_i]f - [\hat{d}_j]f}{d_j - d_i}$$

$[\bar{c}]f$ רציפה בכל אחת מהקואורד

כי: מוגדר רק ע"י בעזרת הנוסחה

מספיק להראות ש-

$$[(n-1)[c_0] + [c_0+\varepsilon]]f \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} [n[c_0]]f$$

$$[c_0, c_0+\varepsilon]f = \frac{f(c_0+\varepsilon) - f(c_0)}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f'(c_0)$$

$$P_{n[c_0]} = \sum \frac{f^{(k)}}{k!}(x-c_0)^k$$

$c_0 = c_1 = c_2$ $\qquad\qquad$ $c_5 = c_6$

$c_0 \quad f_0$

$c_1 \quad f_0 = f'' \; [c_0, c_1]f = f_1$

$c_2 \quad f_0' \qquad f_1 \qquad\qquad f_2$

$c_3 \quad f_3 \quad [c_2, c_3]f = \dfrac{f_3 - f_0}{c_3 - c_0} \quad [c_1, c_2, c_3]f = \dfrac{[c_2, c_3]f - f_1}{c_3 - c_0}$

$c_4 \quad f_4$

$c_5 \quad f_5$

$c_6 \quad f_5 \qquad f_6$

$c_7 \quad f_0 \quad [c_6, c_7]f = \dfrac{f_0 - f_5}{c_7 - c_6}$

$c_6''$

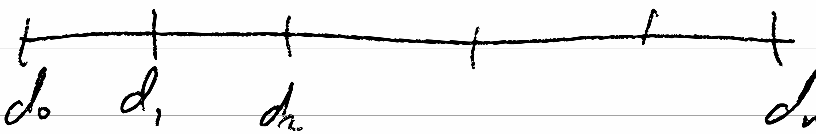
$[c_5, c_3, c_1]f$

## ספליינים

$a<b \in \mathbb{R}$

עבור חלוקה

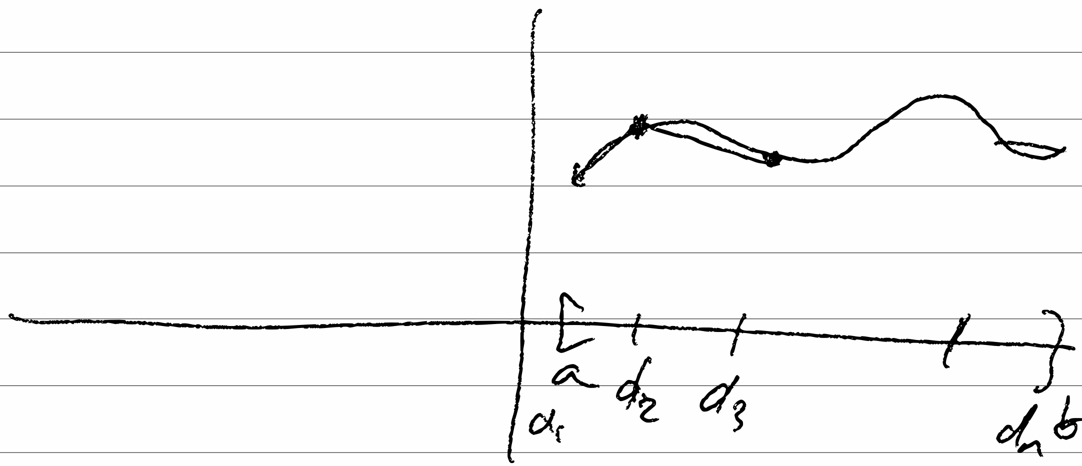
$$\underbrace{a=d_0<d_1<\cdots<d_n=b}_{\Delta}$$




$$S_m^k(\Delta)=\left\{ s\in C^k[a,b] \;\middle|\; s|_{[d_{i-1},d_i]} \text{ פולינום ממעלה } \le m \text{ לכל } i \right\}$$

$k<m$.

פ' לינאריות למקוטעין - $S_1^0(\Delta)$
רציפות.




אם $f$ גז' פע' ברציפות

בדומה, כמו ש המרחק בין $f$ לקירוב הלינארי $s$ חסום ע"י

$$|f(x)-s(x)| \le \frac{M}{2}\cdot\left|(x-d_i)(x-d_{i+1})\right| \le$$

$$\frac{M}{8}\cdot(d_{i+1}-d_i)^2 \qquad M=\max_{x\in[d_i,d_{i+1}]} f''(x)$$

אז השגיאה המינימלית היא

$$\frac{M}{8} \cdot |\Delta|^2$$

כאשר הקטע המירבי - $|\Delta|$

עובדה:

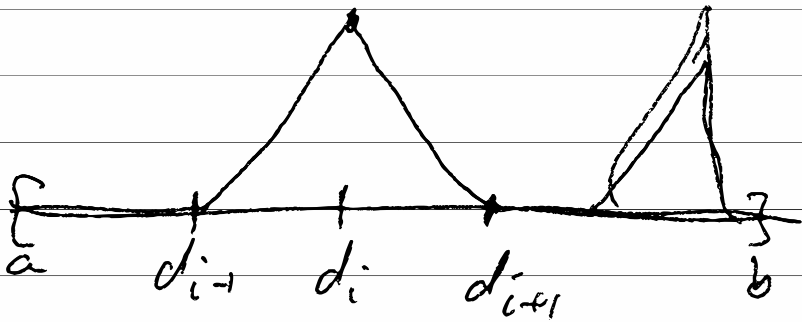
$$\|f - S_1\| \le C \|f - S_1^0(\Delta)\|$$

$V=$

$S_1^0(\Delta)$ - ממימד $n$. מה הק' ל-$V$

שקולות לבסיס הסטנדרטי

$\mathbb{R}^{\{d_1, \dots, d_n\}}$ [illegible]




$B_i$

$\langle B_i, B_j \rangle \neq 0$

רק אם $|i-j|\le 1$

כלומר; אם

$\hat{s}=\sum c_i B_i$

וההטלה של $f$ למרחב $V$ נ״ל

$\bar{c}$ פתרון של מע' המשוואות של

$T\bar{c}=d$

$$T = \left(\langle B_i, B_j \rangle\right)_{i,j}$$ כאשר

$$d_i = \langle f, B_i \rangle$$

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

״כמעט״ אלכסונית.

$$\|f - \hat{s}\|_\infty \le 4 \cdot \overbrace{d(f, S_1^0(\Delta))}^{\text{טלמד ה׳׳}}$$

## ספליינים ממעלה 3:

קירוב של $f$ ע״י יד׳ א׳בחם

ה- $S_3^1(\Delta)$. מקרבים את

$f$ ע״י פ׳ $s$ כך ש-

לכל $i$ $\quad s(d_i)=f(d_i)$

$s|_{[d_{i-1},d_i]}$ פולי׳ ממעלה $\le 3$

$s'(d_i)=m_i$

א. $m_i=f'(d_i)$

ב. לבחור את $m_i$ כך ש- $s\in S_3^2(\Delta)$

# מציאת פתרונות למשוואות

$\boxed{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ (נניח $f$ פולינום).

$f$ גזירה ברציפות על

$[a,b]$ (אולי יותר חלקה).

<u>המטרה</u> למצוא פתרונות

למשוואה $f(x)=0$.

גם משוואות דיפרנציאליות ממימד

סופי (בהמשך)

כ. $F(t,x,x',x'')=0$

$x(0)=x_0$, $x(1)=x_1$

הערה: $C$ ש- $f(a)\cdot f(b)\leq 0$

כי עכשיו קיים.. ההוכחה נותנת

אלגוריתם: נקודת האמצע

$c=\frac{a+b}{2}$ $\longrightarrow$ מקיים $f(c)\cdot f(b)\leq 0$

או $f(a)\cdot f(c)\leq 0$, ממשיכים

על הקטע $[c,b]$ או $[a,c]$

התאמה.

$f(c)\geq 0$

$\leq 0$

הגדרה: לתהליך יש התכנסות לינארית ל-$C$ אם $|x_n-a|<\epsilon_n$

כאשר $\frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n}\xrightarrow[n\to\infty]{} C$ [illegible] קבוע $c$.

במקרה של

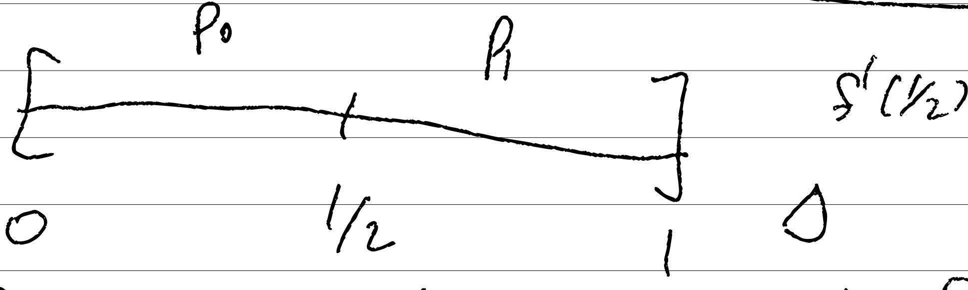
$$|x_n - a| \le \frac{|b-a|}{2^n} = \varepsilon_n$$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = \frac{1}{2}$$

התכנסות מסדר $p$ עם $c$

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^{p}} \to c > 0$$

(מהיר וכן $p$).




$f$ $\quad s \in S_3^1(\Delta) \quad P_0'(1/2) = P_1'(\tfrac{1}{2})$

$P_0(0) = f(0), \quad P_0(1/2) = f(1/2), \quad P_1(1/2) = f(1/2), \quad P_1(1) = f(1)$

$f(x)=0$ $\qquad$ $[a,b]$

$x_i \to 0$ $\qquad$ $f(c)=0$

$$\left|\frac{x_{i+1}}{x_i}\right| < \varepsilon_i \qquad \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} \to c < 1$$

התכנסות לינארית

$p > 1$

$$\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i^{\,p}} \to c > 0$$

התכ׳ מעלה מסדר $p$

טענה: סדרת פונקציות

רציפות $f_0,\dots,f_n$

על $[a,b]$ כך שלכל אחת מהן

יש מס' סופי של שורשים ב $[a,b]$

נסמן $f_{-1}\equiv 0$, $\underbrace{f_{n+1}=-f_n'}$

(לשאר הפונקציות נניח ש $f_n$ {רציף)

ולכל $0\leq i\leq n$ ולכל $r\in[a,b]$

אם $f_i(r)=0$ אז $-f_{i+1}(r)\cdot \underbrace{f_{i-1}}(r)<0$

ולכל נק' רגולרית $x$ נסמן $\sigma(x)$ את מס' הפעמים שיש בסדרה $f_0(x),\dots,f_n(x)$ משנה סימן

משפט: מס' האפסים של $f_n$ הוא $\sigma(a)-\sigma(b)$

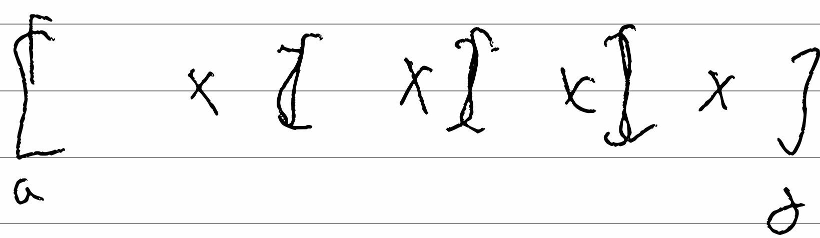
הערה: אם הטענה נכונה לקטע

$[a,c]$ ו- $[c,b]$ (נקודה c)

כלומר אז היא נכונה ל-$[a,b]$

אז מספיק להוכיח למקרה

יש רק נקודה אחת בעייתית.



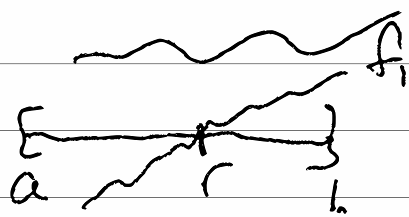
בסיס: מקרה $i=0$ הוכחה

נניח ש- $f_0(r)\neq 0$ לכל $r\in[a,b]$

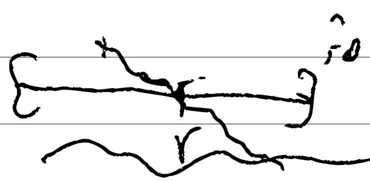
הוכחת המשפט: באינדוקציה על $n$

$n=0$ ✓

$n=1$: נסמן ב- $r$ את הנקודה היחידה




$r(a)=0$ $\qquad$ $r(b)=1$




$f_1(r)=0 \Rightarrow f_0(r)\cdot f_2(r)<0$

$f_2(r)=-f_1'(r)$

$f_0(r)<0,\quad f_1'(r)<0$

נניח שהטענה נכונה ל-n-י

שני מקרים:

א. $f_1(r)\neq 0$. אם נוריד את $f_0$

הסדרה $f_1,\dots,f_{n+1}$ מקיימת

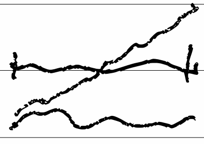
את ההנחות, כי הטענה היא'ד

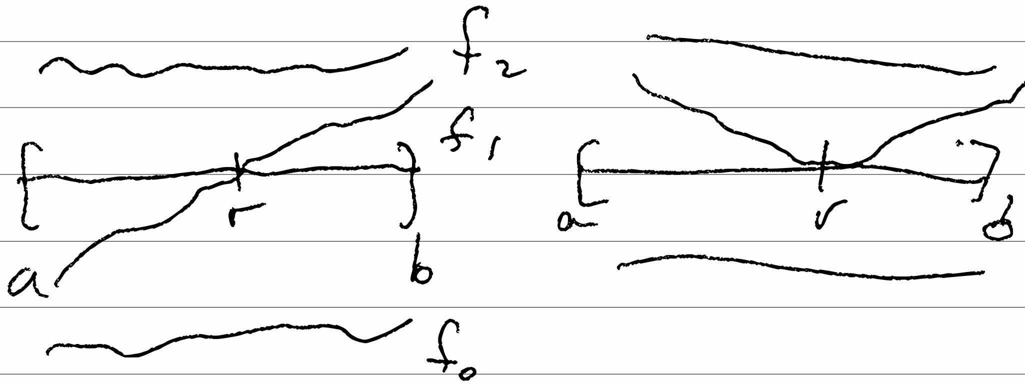
נכון ב-1 ושם הנחה.

ב. $f_1(r)=0$. נר'ז אז $f_0,f_1$

לפי ההנחה $f_0(r)\cdot f_2(r)<0$

אז $f_2(r)\neq 0$.






**בלמה 1.** נניח ש $p$ פולינום

עם שורשים פשוטים.

נגדיר $f_n = p$ , $f_{n-1} = p'$

ו-

$$f_{k+1} = q_k \cdot f_k - f_{k-1}$$

כאשר $\deg(f_{k+1}) < \deg(f_k)$ עבור $k \le n-1$

אז $f_i$ מקיימים שתי תכונות:

1. אין שורש משותף לאף, כי $p, p'$ זרים

שורש משותף. בפרט, ההנחה
מתקיימת עבור $n=i$:

$$f_{n+1}\cdot f_{n-1} = -(f')^2 \le 0$$

2. תהא $\{f_i\}$ קס'ס $\deg(f_i)=i$
של פולינומים אורתוגונליים, מתוקנים

כידוע יש נוסחת נסיגה

$$f_{i+1} = (t-a_i)\cdot f_i - b_i f_{i-1}$$

ו- $b_i>0$.

אם $b\gg 0$, $f_i(b)>0$ לכל $i$.
כי $\sigma(b)\le 0$

וכמו כן $a<<0$ אז $\sigma(a)=n$

לכל $f_i$ יש $i$ שורשים ממשיים שונים.

לכן ניתן לגלות איפה נמצא השורש ה-$k$ לפי החישוב של $\sigma(c)$

בכל שלב, מחשבים

$$x_{k+1}=\frac{x_k+x_{k-1}}{2}$$

ומחשבים את $\sigma(x_{k+1})$

ולפי הערך של $\sigma(x_{k+1})-\sigma(a)$ וגם $\sigma(b)-\sigma(x_{k+1})$ יודעים באיזה חצי לחפש.

מטרה לפתור $f(x)=0$

בקטע $[a,b]$, $f$ רציפה

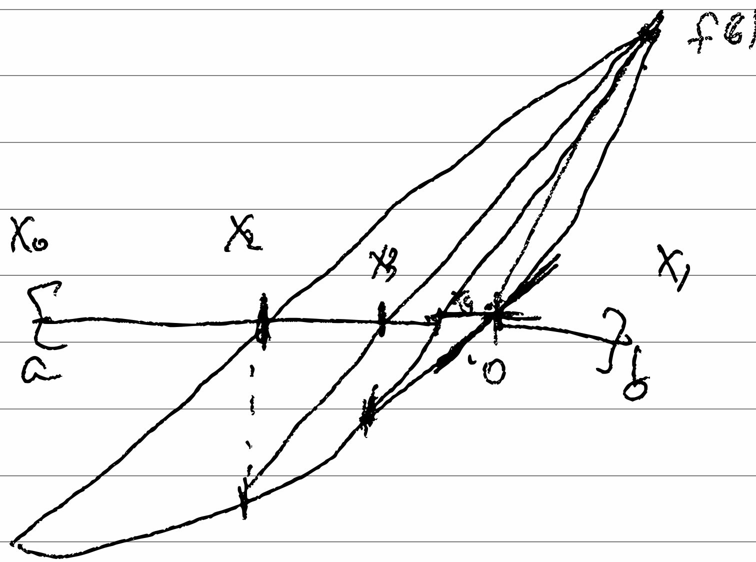
$f(a)\cdot f(b)<0$.


$$\frac{f(b)}{b-a}(x-a)+\frac{f(a)}{a-b}(x-b)=0$$

$$\Downarrow$$

$$f(b)(x-a)-f(a)(x-b)=0$$

$$x=\frac{f(b)a-f(a)b}{f(b)-f(a)}$$




$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)\cdot x_{n-1} - f(x_{n-1})\, x_n}{f(x_n)-f(x_{n-1})} =$$

$$\frac{\left(f(x_n)-f(x_{n-1})\right)\cdot x_n + f(x_n)\cdot(x_{n-1}-x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})} =$$

$$x_n - f(x_n)\cdot\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{f(x_n)}{x_n} \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} =$$

$$1 - \underbrace{\frac{f(x_n)}{x_n}} \cdot \underbrace{\frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)}} \longrightarrow$$

$$1 - f'(0) \cdot \frac{b}{f(b)} =: c$$

---

מעלה ה - $n+1$ , מכך?

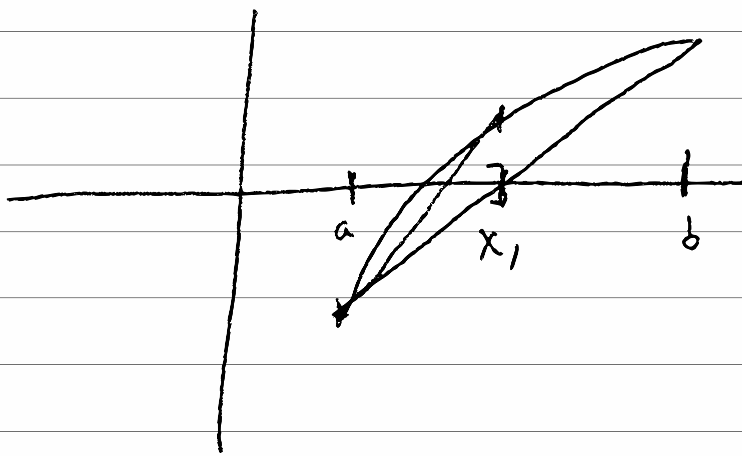
$$d = \frac{f(x_n)\,x_{n-1} - f(x_{n-1})\,x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

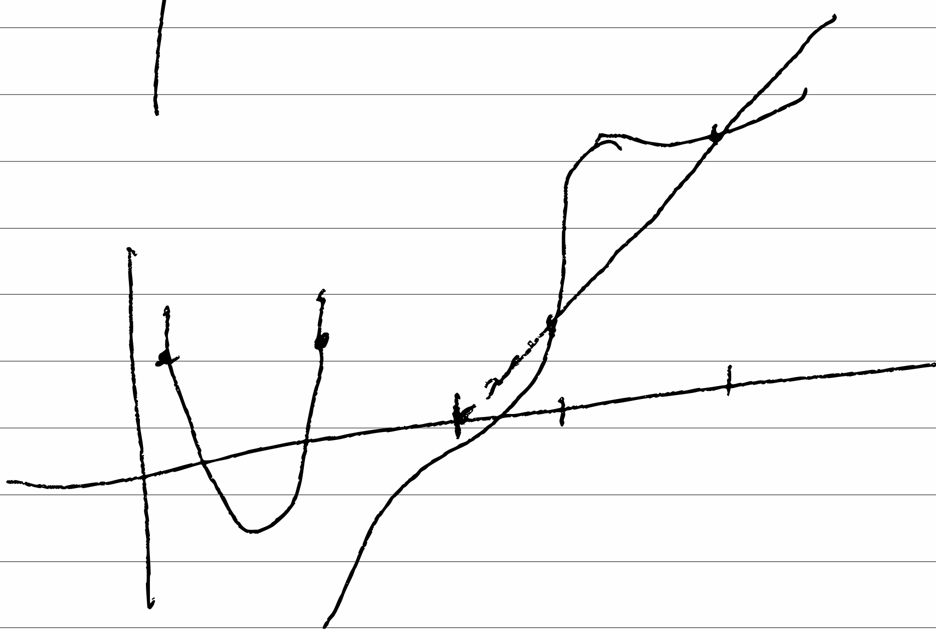
$x_{n+1} = d$ [illegible] $f(d) \cdot f(x_n) \le 0$ אם

$x_{n+1} = x_n,\ x_n = d$ [illegible] אחרת

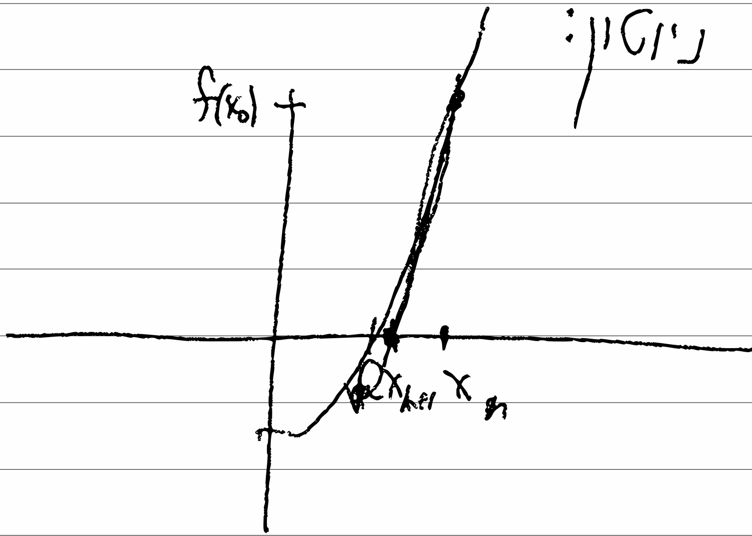
1. שיטת ה-secant

2. שיטת ניוטון



שיטת ניוטון:



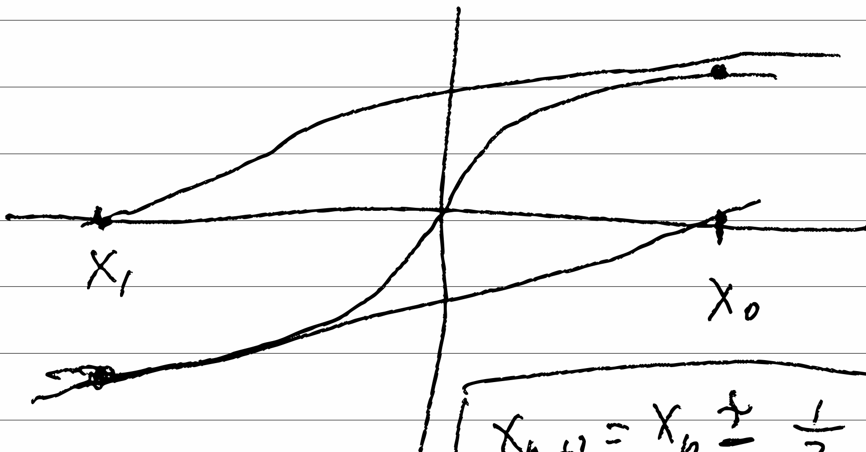

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{0 - f(x_n)} = \frac{1}{f'(x_n)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

דוגמא: כדי לחשב את $\sqrt{a}$

$a \geq 0 \Rightarrow$ $x^2 - a = 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$




$$x_{n+1} = x_n \pm \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & x \geq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}} & x \leq 0 \end{cases}$$

$x_0 = \frac{1}{4}$

$x_1 = -\frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{1}{4} = x_0$

נגדיר

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

התהליך הוא $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

השורש של $f$ הוא נקודת שבת של $\varphi$: נקודה $\alpha$ כך ש- $\alpha = \varphi(\alpha)$.

<u>משפט ההעתקה המכווצת</u>

יהא $(M,d)$ מרחב מטרי

שלם ו- $\varphi: M \to M$ העתקה מכווצת: יש $c<1$ כך ש

$$d(\varphi(x),\varphi(y)) \le c \cdot d(x,y)$$

לכל $x,y \in M$ אז ל- $\varphi$ יש

נקודת שבת יחידה שמהווה גבול של

הגבול של הסדרה, $X_{n+1} = \varphi(x_n)$.

$x_0$ כלשהו.

<u>הוכחה:</u> לכל $i \leq j$,

$$d(x_i, x_j) \leq c^i \cdot \underline{d(x_0, x_{j-i})}$$

$$d(x_0, x_k) \leq d(x_0, x_1) + \ldots + d(x_{k-1}, x_k) \leq$$

$$d(x_0, x_1)(1 + c + c^2 \ldots + c^{k-1}) = \frac{1-c^k}{1-c} d(x_0, x_1)$$

$$\Rightarrow d(x_i, x_j) \leq \frac{c^i}{1-c} d(x_0, x_1) \to 0$$

$\Leftarrow (x_i)_{i \geq 0}$ סדרת קושי $\Leftarrow$ יש

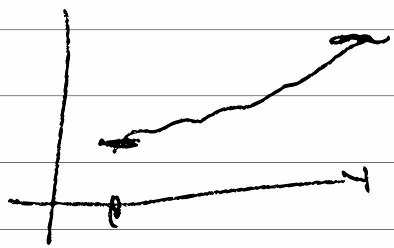
לה גבול $\alpha \Leftarrow$ ($\varphi$ רציפה)

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\lim x_i) = \lim \varphi(x_i) = \lim x_i = \alpha$$

נניח ש- $M \subseteq \mathbb{R}$ (סגורה) ונניח ש-

φ גזירה ברציפות, ו-

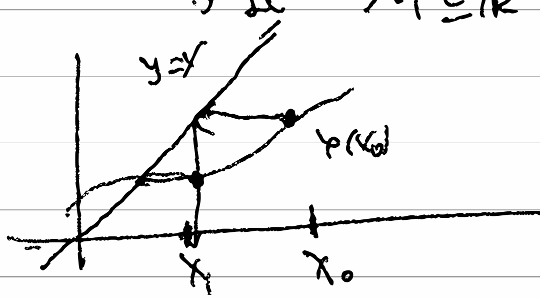
ובנוסף $|\varphi'| \le c < 1$ לכל $x \in M$. אז φ מכווצת



[ אותה טענה עובדת עבור

מה-מ: φ

כאשר $M \subseteq \mathbb{R}^n$ שלם ]



טענה: אם $\alpha$ נקודת הופכת

1- $\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \dots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0$

1- $\varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0$. $\quad (\varphi \in C^p(M))$

אזי סדר ההתכנסות הינו $p$:

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p} \to \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$$

הוכחה:

$$\varphi(x) = \alpha + \varphi'(\alpha)(x-\alpha) + \dots + \frac{\varphi^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}(x-\alpha)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!}(x-\alpha)^p$$

$$\alpha + \frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!}(x-\alpha)^p \Rightarrow \qquad u \in [\alpha, x]$$

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{\varphi^{(p)}(u)}{p!} \cdot (x_n - \alpha)^p$$

במקרה שלנו:

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'^2 - f\cdot f''}{f'^2} = \frac{f\cdot f''}{[f']^2}$$

$$\varphi'(\alpha)=0$$

$$\boxed{\varphi(x) = x - d\, f'^{-1}(x)\cdot f(x)}$$

אז סדר ההתכנסות הוא לפחות ריבועי.

$f'(\alpha)\neq 0 \Rightarrow |f'(u)| \geq$ יקל לכל $u$

בסביבה מספיקה של $\alpha$.

## Secant [illegible]


$$\frac{x_{n+1} - x_n}{-f(x_n)} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

נניח כי קרוב דיו ל $\alpha$.

$$\underline{x_{n+1}-\alpha} = x_n-\alpha - \frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \cdot f(x_n) =$$

$$(x_n-\alpha)\left(1-\frac{f(x_n)}{(x_n-\alpha)[x_n,x_{n-1}]f}\right) =$$

$$(x_n-\alpha)\left(1-\frac{[x_n,\alpha]f}{[x_n,x_{n-1}]f}\right) =$$

$$(x_n-\alpha)\left(\frac{[x_n,x_{n-1}]f-[x_n,\alpha]f}{[x_n,x_{n-1}]f}\right) =$$

$$\underline{(x_n-\alpha)}\,\underline{(x_{n-1}-\alpha)} \cdot \boxed{\left(\frac{[x_n,x_{n-1},\alpha]f}{[x_n,x_{n-1}]f}\right)}$$

$$\underline{\underline{(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)\cdot M}}$$

כאשר $M=\max_{t,s\in U_\alpha}\left|\frac{f''(s)}{2f'(t)}\right|$

(כאן $f'(\alpha)\neq 0$ ולכן המקסימום קיים

בקטע סגור מספיק קטן סביב $\alpha$).

נבחר את $\underline{\underline{U_\alpha}}=\{x \mid |x-\alpha|\le\varepsilon\}$

אם $\underline{\underline{x_n, x_{n-1}\in U_\alpha}}$ ו- $\underline{\underline{\varepsilon\cdot M<1}}$ אז

$$|x_{n+1}-\alpha|\le\varepsilon^2 M\le\varepsilon\cdot 1=\varepsilon$$

ומכאן נסיק $x_n\to\alpha$.

$$|X_{n+1}-\alpha| \leq |X_n-\alpha| \cdot |X_{n-1}-\alpha| \cdot M \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot |X_{n-1}-\alpha| M \leq \varepsilon^2 |X_{n-2}-\alpha| M^2 \ldots$$

$$\underbrace{(\varepsilon \cdot M)}_{<1}{}^n \cdot |X_1-\alpha|$$

$$E_n = \underbrace{|X_n-\alpha|} \cdot M$$

$$\frac{|X_{n+1}-\alpha|}{(|X_n-\alpha|)^p} = \frac{E_{n+1}/M}{E_n^p/M^p} \leq M^{p-1}$$

$$E_{n+1} \leq E_n \cdot E_{n-1}$$

$$\boxed{p^2 = p+1}$$

$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$E_n \leq E^{p^n} \qquad E = \max(E_0, E_1^{1/p})$$

$$E_{n+1} \leq E_n \cdot E_{n-1} \leq E^{p^n} \cdot E^{p^{n-1}} = E^{p^{n-1}(p+1)} = E^{p^{n+1}}$$

$$[x_0, x_1]f = f'(u)$$

$$u \in [x_0, x_1]$$

$$[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(u)}{k!}$$

$$u \in [a, b]$$

---

שיטת ניוטון לפולינומים:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad x^n + a$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_n &= c_n = 1 \\ b_k &= t\, b_{k+1} + a_k \\ c_k &= t\, c_{k+1} + b_k \end{aligned}}$$

$$(x-t)(x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots + b_1) + b_0 = p(x)$$

$$b_n = 1 \qquad b_k = t\, b_{k+1} + a_k$$

## גזירה ואינטגרציה

$f'(c_0)$

$c_0, \dots, c_n \qquad f \rightsquigarrow P_{\bar{c},f}$

$$P_{\bar{c},f}(x) = [\bar{c}]f \cdot (x-c_0)\cdots(x-c_{n-1}) \dots$$

$$p'(c_0) = [\bar{c}]f \cdot (c_0-c_1)\cdots(c_0-c_{n-1}) +$$

$$[c_0, \dots, c_{n-1}]f \; (c_0-c_1)\cdots(c_0-c_{n-1}) + \dots$$

$$f(x) = P_{\bar{c},f}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \cdot (x-c_0)\cdots(x-c_n)$$

$$f'(c_0) \overset{?}{=} P'_{\bar{c},f}(c_0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(c_0))}{(n+1)!}(c_0-c_1)\cdots(c_0-c_n)$$

נ"כ $h=\max\{|c_0-c_i|\}$, הדיוק

מתנהגת כמו $h^n$.

דוגמאות: 1. $c_0$, $c_1=c_0+h$

$$f'(c_0)=\underbrace{\frac{f(c_0+h)-f(c_0)}{h}}+h\frac{f''(\xi)}{2}$$

$$P_{\bar{c},f}(x)=f(c_0)+\underbrace{([c_0,c_1]f)}_{\frac{f(c_1)-f(c_0)}{h}}\cdot(x-c_0)$$

$$h=c_1-c_0$$

$c_{-1} = c_0 - h, \quad c_1 = c_0 + h$ -2

$$P_{\bar{c},f}(x) = f(c_0) + [c_0, c_1]f \cdot (x - c_0) +$$

$$[c_0, c_1, c_{-1}]f\,(x - c_0)(x - c_1)$$

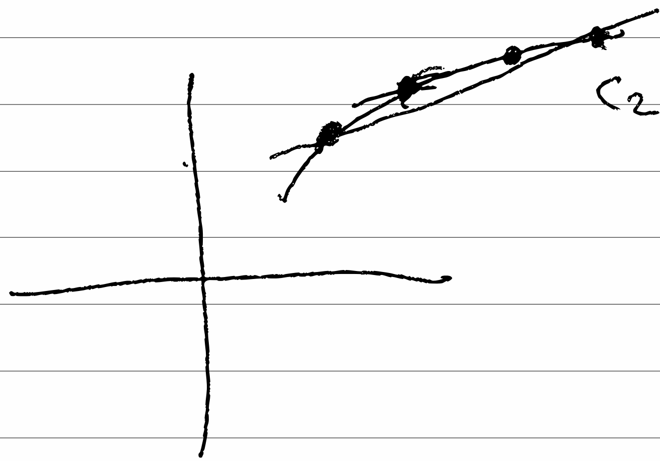
$$[c_0, c_1]f = \frac{f(c_1) - f(c_0)}{h}$$

$$[c_0, c_1, c_{-1}]f = \frac{[c_0, c_1]f - [c_0, c_{-1}]f}{2h} =$$

$$\frac{f(c_1) - f(c_0) + (f(c_{-1}) - f(c_0))}{2h^2} =$$

$$\boxed{\frac{f(c_1) - 2f(c_0) + f(c_{-1})}{2h^2}} \quad \Big| \quad p' = \frac{f(c_1) - f(c_0)}{h} - \frac{f(c_1) - 2f(c_0) + f(c_{-1})}{2h} \;.\; :$$

$$\frac{f(c_1) - f(c_{-1})}{2h}$$




$$e = \frac{f'''(\xi)}{6} \cdot h^2$$

$f_1 = f(c_1) + \varepsilon$ שגיאת חישוב!

$f_{-1} = f(c_{-1}) + \varepsilon$

$$f'(c_0) = \frac{f(c_1) - f(c_{-1})}{2h} + e_2 =$$

$$\frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{\varepsilon}{h} + e_2 =$$

השגיאה הכוללת היא

$$E(h) = M \cdot h^2 - \frac{\varepsilon}{h}$$

$$h_0 = \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{1/3} \quad E(h_0) = \frac{3}{2}(2M)^{1/3} \cdot \varepsilon^{2/3}$$

אם f אנליטית אז נגזרת קיי

$$f'(x_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}dx$$

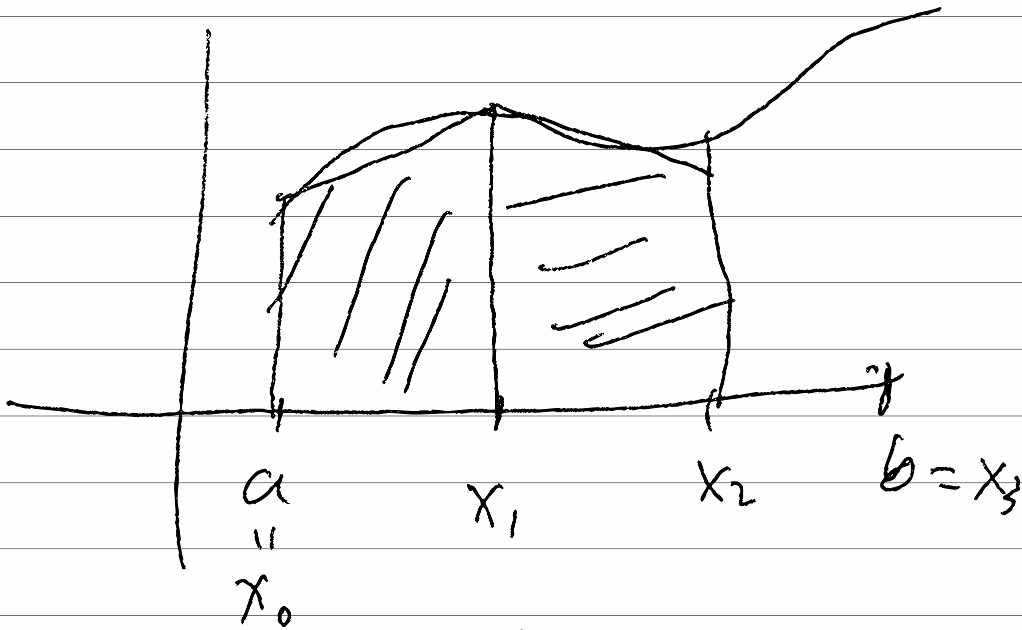
---

## אינטגרציה

רוצים לחשב את $\int_a^b f$

מחלקים את $[a,b]$ לקטעים

הכנים $a=\underline{x_0<x_1}\cdots<x_n=b$




$$x_{i+1} - x_i = h$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f = \frac{\big(f(x_{i+1}) + f(x_i)\big)\,(x_{i+1} - x_i)}{2}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{(x - x_i)(x - x_{i+1}) \cdot \frac{f''(\xi(x))}{2}}_{R_1(x)}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} R_1(x) = \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})\,dx}_{} \cdot \underbrace{\frac{f''(c_i)}{2}}_{} = -\frac{h^3}{12} \cdot f''(c_i)$$

$$\int_a^b f\,dx = \underline{h \cdot \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + \frac{1}{2} f_n\right) +}$$

$$\underbrace{-\frac{h^3}{12} \cdot \sum f''(c_i)}_{\parallel}$$

$$E_n^T(f) = -\frac{h^2}{12} \cdot \underbrace{(b-a)}_{h} \sum f''(c_i) = -\frac{h^2}{12}(b-a) \cdot$$ [illegible]

## שיטת סימפסון לקרב את

f ב שני קטעים עוקבים f

ע"י פולינום ריבועי

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2}\right) - \frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(c_k)$$

$$\int_a^b f = \underbrace{\frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots f_n\right)}_{} + E_n^S(f)$$

$$E_n^S(f) = -\frac{1}{180}\cdot(b-a)h^4\cdot f^{(4)}(c)$$

עבור $e_k$ פ' מחזורית

$[a,b]=[0,2\pi]$

$$E_n^T\left(e^{2\pi i k x}\right)=\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx$$

$$\left(\frac{1}{2}e_k(0)+\sum_{i=1}^{n-1} e_k(2\pi i/n)+\frac{1}{2}e_k(2\pi)\right]\cdot\frac{2\pi}{n}$$

$=0 \qquad k<n$

אם $f$ פ' מחזורית

$$f(x)=\sum_i a_i\cos(ix)+b_i\sin(ix)$$

$$E_n(f)=\sum a_{in}$$

עובדה: אם $f \in C^r(\mathbb{R})$

אז $a_i(f)$ דועכים ל-0 לפחות

כמו $i^{-r}$

---

באופן כללי, מהי הצורה

הכללית של קירוב לאינטגרל

מבוססת

$$\int_a^b f(t)\, w(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot f(t_k) + E_n(f)$$

9

$A$ – פולינומים ב-$x$   $A_1, A_{-1}$

$T: A \to A$   $T(f) = f\circ\tau$   $A_\tau$

$\tau^2 = Id$   $T^2 = Id$

$T$ הפיכה לינארית

$A_i =$ המרחב העצמי של $i$

$\boxed{\tau^n = Id \quad G \quad \text{חבורה סופית}}$

$x+\frac{1}{x}$   $\tau(x) = \frac{1}{x}$

$$A^n = \left\{ t \in \mathbb{F}[x, \tfrac{1}{x}] \;\middle|\; t(x) = \sum_{i=-n}^{n} a_i x^i \right\}$$

$\dim A^n = 2n+1$

$(x+\frac{1}{x})^k \in A_1^n = A^n \cap A_1$   $0 \le k \le n$

$k<n$   $(x-\frac{1}{x})\cdot(x+\frac{1}{x})^k$

אינטגרציה ע"י נוסחה מהצורה

$$\int_a^b f(t)\,w(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} w_i f(t_i) + E_n(f)$$

$w(t)$ – "פונקציית משקל" (אי שלילית, רציפה, ו- $\int_a^b f(t)w(t)dt$ קיים לכל פולינום $f$).

המטרה היא למצוא נקודות אופטימליות $t_i$. ואופטימליות:

$E_n(f)=0$ לפולינומים מדרגה $\leq m$ עבור $m$ מירבי.

V – מרחב של פונקציות f עבורן

$$\Psi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, w(t)\, dt$$

קיים. אז V מרחב לינארי

שכולל את הפולינומים

$\Psi : V \to \mathbb{R}$

פ׳ הערכה לינארית. $S_t(f) = (f(t_1), \dots, f(t_n))$

$S_t : V \to \mathbb{R}^n$ $\qquad \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\varphi_{\bar{t}}$ $\qquad \dim P_k = k$

לכל k, מרחב הפולינומים ממעלה $< k$ $P_k$

$$\Psi\big|_{P_k} = \varphi \circ S_t\big|_{P_k}$$ $\qquad$ . $P_k \subseteq V$

הצמצום

$S_{\tilde t}|_{P_n} : P_n \to \mathbb{R}^n$

הוא ע על (לפי אינטרפולציה)

אז עבור $\varphi = \psi \circ S_{\tilde t}^{-1}$

נרחיב את ההגדרה (באופן יחיד).

כך שנמצאת $\tilde t$ כך ש-

$\psi|_{P_{n+1}} = \varphi \circ S_{\tilde t}$

בפרט, עבור $f \in \ker S_{\tilde t}$ , $\psi(f) = 0$

באותו אופן עבור חצאי כל ת.ה:

$S_{\tilde t}(f) = 0 \Rightarrow \psi(f) = 0$

$S_{\bar t}(f)=0 \Rightarrow \Psi(f)=0$ $\quad f\in P_k$

$\Updownarrow$

$f(t_i)=0\ \forall i \iff f=\Pi_n\cdot g \quad g\in P_{k-n}$

כאשר $\Pi_n(t)=(t-t_1)\cdots(t-t_n)$

כלומר מתאפסים בנקודות $\bar t$

כלף $\underline{\Psi(\Pi_n\cdot g)}=0$

לפולינומים $g\in P_l$ עבור $l$

כמה שיותר גדול.

נקח את $l<n$ ומקסימלי כך:

$l=n-1$ . אז $\Pi_n$ הפולינום

מגדירה $n$ מכפלה פנימית ביחס לנקודות:

הפנימית $(u,v)\mapsto\langle u,v\rangle=\underline{\underline{\Psi(u\cdot v)}}$

3 דוגמאות: 1. $a=-1,\ b=1,\ w(t)=1$

$t_i$ האפסים של פולינומי לג'נדר

2. $a=-1,\ b=1$, $w(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$t_i$ השורשים של $\pi_n$

$$w_i = \int \underbrace{\frac{\pi_n(t)}{(t-t_i)\cdot \underline{\pi_n'(t_i)}}}\, w(t)\,dt$$

$$\|?$$

$$w(t_i)$$

1. כל השורשים של $\Pi_n$ הם
ממשיים ושונים.

2. כל ה-$w_i > 0$.

$l_i$ - הפולינום שמתאים לאיבר ה-i
בבסיס הסטנדרטי
$$w_i = \sum w_j l_i^2(t_j) = \int l_i^2 w \, dt > 0$$

3. לכל $f$, $E_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

יש סדרה $p_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$,
$p_i$ פולינום ממעלה $i$.

$$|E_n(f)| = |E_n(f - P_{2n-1})| =$$

$$\left| \int_a^b (f - P_{2n-1})\, w(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot (f(t_i) - P(t_i)) \right| \leq$$

$$\left| \int_a^b \underline{(f - P)}\, w(t)\,dt \right| + \sum_{i=1}^{n} w_i \, |f(t_i) - P(t_i)| \leq$$

$$\|f - P\|_\infty \cdot \left( \underline{\int w(t)\,dt} + \boxed{\sum_i w_i} \right) =$$

$$\|$$

$$\underline{\|f - P\|_\infty} \cdot 2 \cdot \underline{\mu_0}$$

__הערה:__ את סדרת תת'

המרחבים $P_k$ אפשר להחליף

בסדרה יותר כללית $V_k \subseteq V_{k+1} \subseteq \dots$

---

$V$ - מרחב פונקציות

$\Psi : V \to \mathbb{R}$

$\Theta = \varphi \circ S_t : V \to \mathbb{R}$

$E = \Psi - \Theta$

$Ep = 0$ לכל $p \in P_k$

אם $f \in C^{k+1}([a,b])$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i + \frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt$$

$$E(f) = \frac{1}{k!} E \int_0^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{k!} E \int_0^b (x-t)_+^k f^{(k+1)}(t)\,dt \stackrel{?}{=}$$

$$\frac{1}{k!}\int_0^b \underbrace{E\left((x-t)_+^k\right)}_{k!\,K_k(t)} f^{(k+1)}(t)\,dt$$

$$(x-t)_+ = \begin{cases} x-t & t \le x \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$E(f) = \int_a^b \underline{\underline{K_k(t)}}\, f^{(k+1)}(t)\, dt =$$

$$K_k(t) \geq 0 \quad a/C$$

$$= f^{(k+1)}(\tau) \cdot \underbrace{\int_a^b K_k(t)\, dt}$$

# Numerical Linear Algebra

Folkmar Bornemann

1. לפתור מערכת משוואות

$A\bar{x}=b$

2. למצוא ערכים ווקטורים עצמ״ים

מקרה קל: $A$ מטריצה משולשית

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$cy=d_2 \Rightarrow y=d_2/c$$

רעיון! נחפש פירוק $\underline{\underline{A = LU}}$

כאשר $U$ משולשית עליונה

$L$ משולשית תחתונה

[נניח ש-$A$ הפיכה]

$Ax = b \iff LUx = b \iff$

$Ux = c$ ולכן $Lc = b$

נדרש גם שב-$L$ כל המרכיבים

על האלכסון הם 1!

<u>דגש:</u> פירוק כזה הוא יחיד

(אם הוא קיים)

$L_1 U_1 = L_2 U_2 \Rightarrow \underbrace{L_2^{-1} L_1}_{I} = \underline{U_2 U_1^{-1}}$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \boxed{y} \end{pmatrix}$$

[לא קיים אם $a=0$, נניח $a\neq 0$]

$$xa = c \Rightarrow x = c/a$$

$$bx + y = d \Rightarrow y = d - \frac{bc}{a}$$

$$A = LU =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & a_1 \\ b_1 & A' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \ell_1 & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\alpha_1}{\overset{\shortparallel}{x}} & r_1 \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & U' \end{pmatrix}$$

$$n-1$$

$$(x \mid r_1) = (\alpha_1 \mid a_1)$$

$\underline{x = \alpha_1 \neq 0}$ | כדי שיהיה פתרון

$$\underline{\ell_1 = b_1 / \alpha_1}$$

$B = L'U'$ פתרון של הבעיה
בממד אחד יותר נמוך, של מה

$$B = A' - \ell_1 r_1$$

באופן כללי, יש מטריצת פרמוטציה

$P$ כך ש-

$$PA = LU$$

כאשר $U$ משולשת עליונה,

$L$ משולשת תחתונה עם $1$

על האלכסון ו- $|x|\le 1$ לכל

קואורדינטה $x$ ב-$L$.

---

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]} \end{pmatrix} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$P_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3/5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & -4/5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4/5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4/5 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & P_2 & \end{pmatrix}$$
$$\parallel$$
$$P$$

---

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow 1 \qquad 0 < \varepsilon$$

$$|\Gamma\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - 1/\varepsilon \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## פירוק Cholesky

נניח ש- $A=A^*$ וחיובית:

לכל $\bar{x}\neq 0$, $\bar{x}^*A\bar{x}>0$

(כיוון ש- $A=A^*$ אז

$$\left((\bar{x}^*A\bar{x})^* = \bar{x}^*A^*\bar{x} = \bar{x}^*A\bar{x} \in \mathbb{R}\right.$$

במילים אחרות

$$(\bar{x},\bar{y}) \mapsto \bar{x}^*A\bar{y}$$

מכפלה פנימית.

אז כל הערכים העצמיים

ממשיים וחיוביים.

הערה: ו.כ.לש $A$ חיובית אזי

הע"ע שונים מ-0 על האלכסון,

2 ערכי המטריצות על האלכסון

הן לכן חיוביות

אז למטריצה כזו יש פירוק

$A = LU$

לכן

$A = A^* = U^* L^*$

~~אבל~~ אפשר לדרוש שהאיברים

של האלכסון יהיו חיוביים ש-

$L^* = U$

(ולכן גם $L = U^*$)

לכן יש פירוק יחיד $A = L \cdot L^*$

כאשר $L$ משולשת תחתונה

ובאיברים על האלכסון של $L$

חיוביים.

מחשבים באותה צורה כמו

פירוק $LU$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & a_1 \\ & \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & a_1 \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

1. נניח ש-$A$ מטריצה מלבנית

כלשהי

$A: K^m \to K^n$

$K = \mathbb{R}/\mathbb{C}$

נניח ש-$A$ חח"ע. רוצים

לפרק $\underline{A = QR}$

כאשר $Q$ אורתוגונלית

ו-$R: K^n \to K^n$ משולשת עליונה.

עם איברים חיוביים על האלכסון.

__טענה:__ $A$ חח"ע אם ורק אם

$A^*A$ חיובית.

הערה: $A^*A$ מוגדרת

למה, כי $\|Ax\| = 0 \iff$

$Ax = 0 \iff x = 0$

נניח ש-$A$ הפיך. כך נקבל

לפירוק

$$A^*A = L\cdot L^*$$

$L$ משולש תחתון. ניקח

$R = L^*$, ונגדיר $Q = AR^{-1}$

נבדוק ש- $Q^*Q = Id$. אכן,

$$Q^*Q = (R^{-1})^* A^* A R^{-1} = L^{-1}\cdot(L\cdot L^*)\cdot R^{-1}$$

$$R\cdot R^{-1} = Id$$

עבדנו, אם $A = Q_1 R_1$ אז

$$A^*A = R_1^* Q_1^* Q R_1 = R_1^* R_1$$

ו.ג. פירוק היחיד

גישה אלטרנטיבית: $Q$ היא

למטריצה המוצגת של תהליך

גרם-שמידט על עמודי

המטריצה של $A$:

$$A = Q \cdot R \iff A \cdot \underline{R^{-1}} = Q$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots \\ & \gamma & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad A = (a_1, \ldots, a_n)$$

$\alpha = 1/\|a_1\|$ $\quad \beta \cdot a_1 + \gamma a_2$

## אלגוריתם:

$$A = Q\cdot R = \underline{q_1\cdot r_1} + (q_2,\dots,q_k)\, R'$$

$$A = (a_1,\dots,a_k)$$

$$A = QR$$

$$Q = (q_1,\dots,q_k)$$

$$Q^* A = R$$

$$R = \left(\begin{array}{c|c} \rho & \bar{r} \\ \hline 0 & R' \end{array}\right)$$

$$(a_2,\dots,a_k) = (q_2,\dots,q_k)\cdot$$

$$\rho\cdot q_1 = a_1 \implies \rho = \|a_1\|,\ \underline{q_1 = a_1/\rho}$$

$$q_1\cdot a_i = r_i \qquad q^* A = (\rho, \bar{r})$$

ונוכל להמשיך באינדוקציה:

$$A - q\cdot r_1 = Q'\cdot R'$$

ניתוח שגיאות של פתרון מערכת

<u>משוואות</u>

$$\underline{A}x=\underline{b} \quad (A \text{ הפיכה})$$

$$\mathrm{cond}(A)=k(A)$$

$$k(A)=\|A^{-1}\|\cdot\|A\|$$

$b^*$ – הפרעה, של בעיגול של $b$

$$\boxed{\frac{\|b^*-b\|}{\|b\|}}$$

$$\frac{\|A^{-1}b^*-A^{-1}b\|}{\|A^{-1}b\|}=\frac{\|A^{-1}(b^*-b)\|}{\|A^{-1}b\|}\le\frac{\|A^{-1}\|\|b^*-b\|}{\|A^{-1}b\|}=$$

$$\frac{\|A^{-1}\|\cdot\|b\|}{\|A^{-1}b\|}\cdot\frac{\|b^*-b\|}{\|b\|}=\frac{\|A^{-1}\|\cdot\|A\cdot A^{-1}\cdot b\|}{\|A^{-1}b\|}\cdot\frac{\|b^*-b\|}{\|b\|}\le$$

$$\le \kappa(A) \cdot \frac{\|b^* - b\|}{\|b\|}$$

$$\|Av\| \le \underbrace{\|A\|}\cdot \|v\|$$

$$\|A\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|$$

כש $\tilde{A}$ קירוב של $A$

$$\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}$$

$$\frac{\|A^{-1}b - \tilde{A}^{-1}b\|}{\|\tilde{A}^{-1}b\|} = \frac{\|A^{-1}\cdot\tilde{A}\tilde{A}^{-1}b - A^{-1}\cdot A\tilde{A}^{-1}b\|}{\|\tilde{A}^{-1}b\|} =$$

$$\frac{\|A^{-1}(\tilde{A} - A)\tilde{A}^{-1}b\|}{\|\tilde{A}^{-1}b\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\,\|\tilde{A} - A\|\cdot\|\tilde{A}^{-1}b\|}{\|\tilde{A}^{-1}b\|} =$$

$$\frac{\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|} = \kappa(A)\cdot\frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|}$$

$$\|ABv\| \le \|A\|\|Bv\| \le \|A\|\|B\|\|v\|$$

---

**טענה (Kahan):**

$$\frac{1}{k(A)} = \min\left\{ \frac{\|A-\tilde{A}\|}{\|A\|} \;\middle|\; \tilde{A} \text{ לא הפיכה} \right\}$$

**הוכחה:** נניח $\tilde{A}$ לא הפיכה,

צ"ל

$$\frac{\|A-\tilde{A}\|}{\cancel{\|A\|}} \ge \frac{1}{\cancel{\|A\|}\cdot\|A^{-1}\|}$$

[illegible] ש-

$$\|A^{-1}\| \cdot \|A-\tilde{A}\| \ge 1$$

:

ג/ לט

$$\|A^{-1}\| \cdot \|A-\tilde{A}\| \geq \|A^{-1}(A-\tilde{A})\| =$$

$$\|I - A^{-1}\tilde{A}\|$$

אז מספיק להוכיח ש-

$$\|I - A^{-1}\tilde{A}\| \geq 1$$

אבל אם $0 \neq v \in \ker(\tilde{A})$ אז

$$\|I - A^{-1}\tilde{A}\| \geq \|(I - A^{-1}\tilde{A})v\| / \|v\| = \|v\|/\|v\|$$

נבנה $\tilde{A}$ לא הפיכה כך

$$\|A - \tilde{A}\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

ניקח $v$ כך ש- $\|v\|=1$ $-1$

$w = A^{-1}v$ , $\|A^{-1}v\| = \|A^{-1}\|$

נבחר את מרחב $V$ משלים

ל- $w$ ונגדיר $\tilde{A}w=0$

ו- $\tilde{A}|_U = A|_U$ .

$$\underbrace{\|A-\tilde{A}\|}\, = \|(A-\tilde{A})\cdot w\| / \|w\| = \|v\| / \|A^{-1}v\| =$$

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

$$\sup_{\substack{\|cw+u\|=1 \\ u\in U}} \|(A-\tilde{A})(cw+u)\| = \sup \|(A-\tilde{A})cw\| =$$

$$\sup \|Acw\| = \|Aw\| / \|w\|$$

## שגיאה של האלגוריתם

$f$ – הפונקציה שרוצים לחשב

$\hat{f}$ – אלגוריתם

בהינתן קלט $y$, האם יש

$y^*$ כך ש- $\hat{f}(y)=f(y^*)$

(קרוב ל-$y$)

אם לא נכון, אפשר להשוות

לתשובה האמיתית דרך $\mathrm{cond}(f)(y)$

ההנחות בעולם המחשבים הן

יציבות, למשל $a \hat{\cdot} b = a^{*} \cdot b$

מספרים: מכפלה סקלרית,

מכפלת מטריצה בוקטור

פעולות יציבות.

כפל מטריצות לפי פעולה יציבה

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot(c\ d) = \begin{pmatrix}* & *\\ * & *\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}^{*}\cdot(c\ d)^{*}$$

$\det \neq 0$

---

נניח ש- $f = h\circ g$

[illegible] (1)

$\hat{f} = h\circ f\circ g$

אז - פונקציות בעוגן.

$\hat{f}$ יכול להיות לא יציב גם

א. מס' המצב של $h$ גדול

ב. מס' המצב של $g^{-1}$ (הבעיה

שנייה הפיכה) גדול.

---

שגיאה באלגוריתמים לפתרון
<u>משוואות</u>

$\tilde{x}$ - פתרון מקורב שהתקבל
מאלגוריתם.

$$\boxed{y^* = \tilde{A}, \quad \hat{f}(y) = \tilde{x}}$$

$$\omega(\tilde{x}) = \min\left\{\frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|} \,\middle|\, \tilde{A}\tilde{x} = b\right\} =$$

$$\min\left\{\frac{\|E\|}{\|A\|} \,\middle|\, (A+E)\tilde{x} = b\right\}$$

<u>C רעיון</u> (Rigal-Gaches)

$$w(\tilde{x}) = \frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|A\| \, \|\tilde{x}\|}$$

<u>הוכחה דומה</u>
בהוכחת הקודם הזה

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} = \frac{\|A^{-1}b - A^{-1}A\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} \leq$$

$$\|A^{-1}\| \cdot \frac{\|b - A\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} = \kappa(A) \cdot w(\tilde{x})$$

האלגוריתמים שדיברנו עליהם:

$f = h \circ g$

כאשר

$g(A) = (M, N) \quad , \quad M \cdot N = A$

$h(M, N, b)$ - פתרון מערכת משוואות.

$V = h$

$f$ אלגוריתם יציב אם ורק אם:

- מספר המצב של $h$ קטן, ✓

- מספר המצב של $g^{-1}$ קטן

כושר $g$ כפל מטריצות

מס' המצב של כפל מטריצות:

$$\frac{\|\tilde{M}\cdot\tilde{N} - M\cdot N\|}{\|M\cdot N\|} =$$

$$\frac{\|\tilde{M}\cdot\tilde{N} - M\tilde{N} + M\tilde{N} - M\cdot N\|}{\|M\cdot N\|} \le \quad \frac{\|\tilde{M} - M\|}{\|M\|}, \frac{\|\tilde{N} - N\|}{\|N\|}$$

$$\frac{\|\tilde{M} - M\|\cdot\|\tilde{N}\| + \|M\|\|\tilde{N} - N\|}{\|M\cdot N\|} =$$

$$\frac{\frac{\|\tilde{M} - M\|}{\|M\|}\cdot\|M\|\|\tilde{N}\| + \|M\|\|N\|\cdot\frac{\|\tilde{N} - N\|}{\|N\|}}{\|M\cdot N\|} \le 2\cdot\frac{\|M\|\cdot\|N\|}{\|M\cdot N\|}$$

דוגמא לחשב את מס' המצב
של כפל מטריצות:

$M, N \longrightarrow M\cdot N$

$$\frac{\|\tilde M\cdot\tilde N - M\cdot N\|}{\|M\cdot N\|} = \qquad \Bigg| \quad \begin{aligned}\tilde M &= (\tilde M - M) + M\\ \tilde N &= (\tilde N - N) + N\end{aligned}$$

$$\|\underline{(\tilde M - M)}\cdot\underline{(\tilde N - N)} + M(\tilde N - N) + (\tilde M - M)\cdot N + M\cdot N - \cancel{M\cdot N}\|$$

$$\|M\|\underbrace{\|\tilde N - N\|}_{\|N\|\cdot\varepsilon} + \underbrace{\|\tilde M - M\|\|N\|}_{\varepsilon\cdot\|M\|} \le 2\|M\|\|N\|\cdot\varepsilon$$

$$\kappa\left(\begin{matrix}\text{הכפלת}\\ M,N\end{matrix}\right) = \frac{2\|M\|\|N\|}{\boxed{\|M\cdot N\|}}$$

---

יציבות של אלגוריתם לפתרון
משוואות לינאריות $Ax=b$

$A \longrightarrow B\cdot C \longrightarrow$ פתרון משוואות $Bz$

1. $\underbrace{A=Q\cdot R}$ כאשר $R$ משולשת עליונה ו- $Q$ אורתוגונלית

$Q$ אורתוגונלית $\Leftarrow$ $\|QR\|=\|R\|$

(נורמת $L_2$).

$\|QRv\|=\|Rv\|$

$\|Q\|=1$

2. $A$ סימטרית חיובית,

$A=\underline{R^T}\cdot R$

כאשר $R$ משולשת עליון.

$\|A\|=$ ערך עצמי הכי גדול

$$\|A\| = \sqrt{\|A^T A\|} = \sqrt{\max \lambda}$$ , ע"ע של $A^T A$

$$A = R^T R$$

$$\|R\|^2 = \|R^T R\| = \|A\|$$

$$\|A\|^2 = \max_{\|v\|=1} \langle Av, Av \rangle =$$

$$\max(\langle A^T A v, v \rangle)$$

3. $A = LU$ , $U$ משולשת עליונה, $L$ משולשת תחתונה עם 1 על האלכסון.

פירוק QR שמלק לגרם שמ׳):

$u_1, u_2, u_3, \dots \in V = \mathbb{R}^n, \langle , \rangle$

מנורמל

ונקבל ע״י ג״ש $v_1, v_2, v_3, \dots \in V$

כך ש

א. $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

ב. לכל $i$, $\langle u_1, \dots, u_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$

איך

$W_1 = \langle e_1 \rangle$

$W_2 = \langle e_1, e_2 \rangle$

$W_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

$A = (u_1 \ u_2 \ u_3 \dots)$

$Q = (v_1 \ v_2 \ v_3 \dots)$

א: $Q$ אורתוגונלית

$W$ ~ מרחב נוצר סופי)

$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots W_k = W$

$A, Q : W \to U$

$AW_i = QW_i$ לכל $i$

$A,B$ הנ"ל [illegible]

$A \sim B$

אם $Aw_i = Bw_i$ לכל $i$

אם $A \sim B$ אז

ורק אם $A = BR$ [illegible]

$R : W \to W$ [illegible] [illegible] $RW_i = W_i$

$R = B^{-1}A$

$A = QR \Rightarrow Q = AR^{-1}$

$u_1 \mapsto u_1 / \|u_1\| \quad \left(\frac{1}{\|u_1\|} \; \ddots\right)$

$Ax = b$

A מטריצה כללית לאו דווקא ריבועית

$A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  $m \geq n$

נרצה למצוא $x$ עבורו

$\|Ax - b\|$

מינימלי.

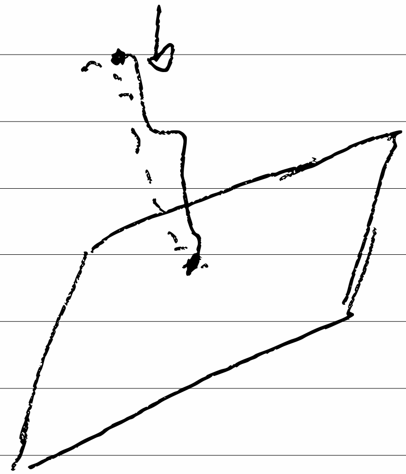
במילים אחרות, למצוא וקטור

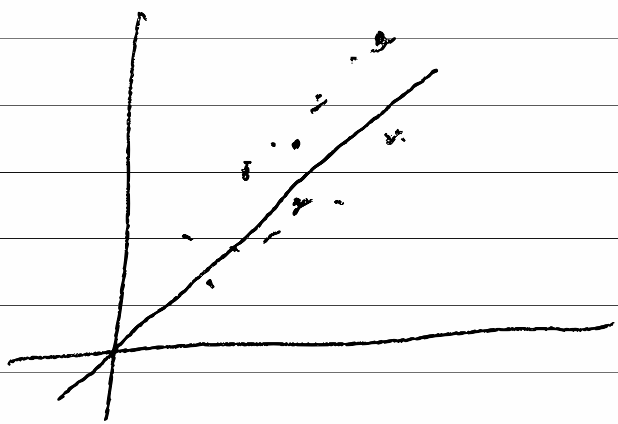
$Ax$ בתמונה של $A$ שקרוב

ביותר ל-$b$.

<u>דוגמא:</u> $n=1$, $A = \underbrace{(1\ 1 \ldots 1)}_{m}^{T}$

כל ממוצע $X$ עם $x = {}'' b_i$





ראינו: הפתרון הוא הפתרון של המערכת

$$A^TAx = A^Tb$$

בעיות: 1. לא יעיל בחישובים מסוימות

2. לא יציב מבחינה חישובית:

- לעומת זאת מס' המצב של

המערכת $Ax=b$ ולהשוות לאלגוריתם

במקרה שלגביה יש פתרון

מס' המצב הוא

$$\kappa(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| = \sqrt{\|A^TA\|}\cdot\sqrt{\|(A^TA)^{-1}\|} = \sqrt{\kappa(A^TA)}$$

ד דוגמא: ε קטן.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow x = (1, 1)$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1+\varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon^2 \end{pmatrix}}$$

$$k(A^T A) = 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$$

$$k(A) = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$$

de veore

$$* \quad \|A^T A\| = \max \left( \left| (T - (1+\varepsilon^2))^2 - 1 \right| \right) :$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

$1+a \qquad \varepsilon^2 \qquad \underline{\underline{2+\varepsilon^2}}$

$a-1 \qquad \frac{1}{\varepsilon^2}$

ריבועים עם גרם-שמידט

$A = QR \implies$

$$A^T A x = A^T b = \cancel{R^T} Q^T b$$

$$\|$$

$$R^T \underbrace{Q^T Q}_{I} R x = \cancel{R^T} R x$$

$$Rx = Q^T b$$

ערכים עצמיים והקשרים לפולינומים

$$x^{n+1} + \sum a_i x^i = 0 \quad \sim \quad \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & & -a_1 \\ & 0 & \vdots \\ & 1 & -a_n \end{pmatrix}$$

שכבר ז' מספיק לדעת למצוא
וקטור עצמי וערך עצמי אחד
(בהנחה שהמרחבים העצמיים

בשלילה

יש משלים וקטור עם
נשלים אותו לבסיס אורתונורמלי,

בבסיס כזה

$$A_1 = Q^* A Q$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \cdots \\ 0 & \\ 0 & A^* \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}$$

$(x, a_2, \dots, a_n)$

$\alpha x + \dots = \mu x$ $\alpha \neq \mu$ ✓

$$A = Q^t U Q$$

Schur decomposition

אם $A^tA = AA^t$ (A נורמלית)

אז $U$ נורמלית

$$U = QAQ^t$$

$$U^tU = QA^t\underbrace{Q^tQ}A Q^t = Q\underbrace{A^tA}Q^t =$$

$$QAA^tQ^t \ldots = \underline{\underline{UU^t}} \Rightarrow$$

$U$

אלכסונית

נתונה מטריצה $A$ עם $v$, $\lambda$

ערך עצמי!! וקטור עצמי

$\tilde{\lambda}$ ערך עצמי של מטריצה

מקורבת $\tilde{A}$

$$\cancel{\frac{|\tilde{\lambda}-\lambda|}{|A|}} \qquad \cancel{\frac{\|\tilde{A}-A\|_2}{\|A\|}}$$

$\tilde{\lambda}$

$$\alpha = \min\{\|A-\tilde{A}\| \mid \tilde{\lambda} \text{ ערך עצמי של } \tilde{A}\}$$

?

$$= \|(\tilde{\lambda}I-\tilde{A}) - (\tilde{\lambda}I-A)\|$$

$\tilde{\lambda}I-\tilde{A}$ לא הפיכה

$\alpha = d(\tilde{\lambda} \underline{I} - A$, מטריצות לא הפיכות $) =$

$$\frac{\|\tilde{\lambda} I - A\|}{\underbrace{\kappa(\tilde{\lambda} I - A)}} = \frac{1}{\underbrace{\|(\tilde{\lambda} I - A)^{-1}\|}} =:$$

$\underline{\underline{sep(\tilde{\lambda}, A)}}$ ( $= 0$ אם $\tilde{\lambda}$ ער(ך) עצמי של $A$ )

$$\frac{|\tilde{\lambda} - \lambda|}{\|\tilde{A} - A\|} \leq \boxed{\frac{|\tilde{\lambda} - \lambda|}{\underline{\underline{sep(\tilde{\lambda}, A)}}}}$$

$\|(\lambda I - A)^{-1}\|$

$v$ וקטור עצמי, ערך עצמי $\mu$

$$(\lambda I - A)v = \lambda v - \mu v =$$

$$(\lambda - \mu)v$$

$$(\lambda I - A)^{-1} v = \frac{1}{|\lambda - \mu|} v$$

$$\Downarrow$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \geq \left|\frac{1}{\lambda - \mu}\right|$$

$$\Downarrow$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{d(\lambda, \sigma(A))}$$

$\sigma(A) = \{$ ע"ע של $A$ $\}$

$\Rightarrow$

$$\operatorname{sep}(\lambda, A) \leq d(\lambda, \sigma(A))$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{3 דוגמה:}$$

$$d(\lambda, \sigma(A)) = |\lambda|, \quad \sigma(A) = \{0\}$$

$$(\lambda I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\lambda^2} \\ \frac{y}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \underset{\lambda \to 0}{\sim} \left|\frac{1}{\lambda^2}\right|$$

טענה: כלש $A$ נורמלית אם

$\text{sep}(\lambda, A) = d(\lambda, \sigma(A))$

הוכחה: $A$ נורמלית $A$ לכסינה

ע"י מטריצה אוניטרית

ולכן ההבדל בין שתיהם. הם

המטריצות אוניטריות לא ישפיעו

להניח ש- $A$ אלכסונית

במקרה הזה המרחק מספיק

עם הערך העצמי הכי קרוב

הערה: A נורמלית

דוגמא: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. כל וקטור הוא
וקטור עצמי אבל לא כל שון
כאלה יש ב-A שג'ונה.

נניח שכל הערכים העצמיים
הם חד ממדיים.

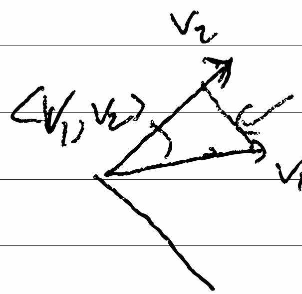
נניח שרוצים לחשב $(\tilde{A}, V)$
ערך עצמי ווקטור עצמי
של $\tilde{A}$ $V$ - מרחב הרמיטי
מרחב פרויקטיבי
$P(V) = \{ \ell \mid \ell \subseteq V$ תת-מרחב ממימד 1 $\}$

נגדיר $d(\ell_1, \ell_2)$

מומה לפוזן, את הזווית ביניהם

$\ell_1 = \langle v_1 \rangle$ , $\ell_2 = \langle v_2 \rangle$

$\|v_1\| = \|v_2\| = 1$




אם $W = \ell_2^{\perp}$

$\|\pi_W(v_1)\| = d(\ell_1, \ell_2)$

$\langle v_1, v_2 \rangle^2 = \cos^2 \alpha$

$1 = \|v_1\|^2$

$\underbrace{\|v_1\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2}$

**טענה:** אם $A$ נורמלית

והערך העצמי $\lambda$ פשוט

אז

$$d(\tilde{\ell},\ell) \le \frac{\|\tilde{A}-A\|}{\mathrm{dist}(\tilde{\lambda},\sigma(A)\setminus\{\lambda\})}$$

כאשר $\tilde{\ell}$ מרחב עצמי של $\tilde{A}$ עם ערך עצמי $\tilde{\lambda}$.

**הוכחה:** נסמן $W=\ell^{\perp}$,

$\pi_W: V\to W$ הטלה. נבחר $\tilde{v}\in\tilde{\ell}$,

$\|\tilde{v}\|=1$,

$$\pi_W(\tilde{A}-A)\tilde{v} = \pi_W(\tilde{\lambda}\tilde{v} - A\tilde{v}) =$$

$$\pi_W \cdot \tilde{\lambda}\tilde{v} - A|_W \pi_W(\tilde{v}) =$$

$$\underline{(\tilde{\lambda} I - A|_W)}\, \pi_W(\tilde{v})$$

$$\underline{\underline{\pi_W(\tilde{v})}} = (\tilde{\lambda} I - A|_W)^{-1} \pi_W(\tilde{A}-A)\tilde{v}$$

$$d(\ell,\tilde{\ell}) = \|\pi_W(\tilde{v})\| \leq \underline{\underline{\|(\tilde{\lambda} I - A|_W)^{-1}\|}} \cdot$$

$$\|\pi_W\| \cdot \|\tilde{A} - A\| \qquad \begin{matrix} \vee \\ 1/\mathrm{sep}(\tilde{\lambda}, A|_W) = \end{matrix}$$

$$V = \ell \oplus W \qquad \frac{1}{\mathrm{dist}(\tilde{\lambda}, \underline{\sigma(A|_W)})}$$

$$A|_\ell \subseteq \ell, \quad A|_W \subseteq W \qquad \sigma(A) - \{\lambda\}$$

אלגוריתם: בהינתן העתקה לינארית

הגדרנו A מ-V ל-V, A מגדירה

העתקה $P(A): P(V) \to P(V)$

$P(A)(\ell) = A(\ell)$

המרחבים העצמיים הם בדיוק

נקודות השבת של $P(A)$.

כאשר $P(A)$ העתקה מכווצת

אז ניתן לצפות לנקודת

שבת על ידי איטרציות.

טענה: כאשר יש ערך עצמי פשוט

בערך מוחלט מקסימלי, אז $P(A)$

ניתוק מכוונת גרמוש של

כמה חלקים שווים שווים?

לפי המרחק הצבעי.

$$\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$$

$$A^k v_0$$

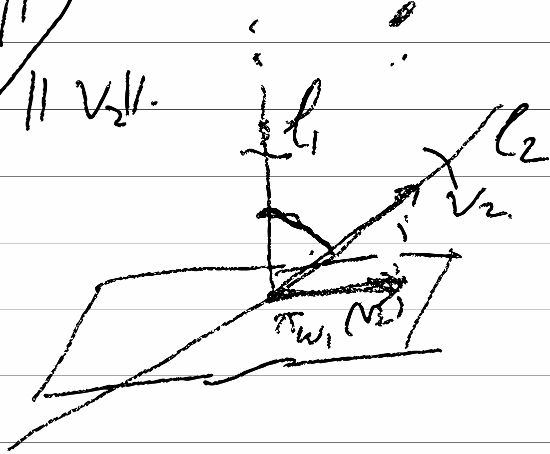
$$c = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}$$

$$d(l_1, l_2)$$

$$\exists v_2 \in l_2$$

$$\|\pi_{W_1}(v_2)\| \big/ \|v_2\|$$

$$W_1 = l_1^{\perp}$$



$A : V \to V$

נ/פ $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

$\lambda_i$ הערכים העצמיים

$l_1, \dots, l_n$

המרחבים העצמיים המתאימים.

$v_0 \not\perp l_1$, $[A^k v_0] \to l_1$

(ההתקדמות מבוססת על קבוע $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$)

$l_1^{\perp} = \bigoplus_{i=2}^{n} l_i$

מטריצה נורמלית: $A^*A = AA^*$

מעל $\mathbb{C}$ $V$ (=) סכום ישר

אורתוגונלי של מרחבים עצמיים $\Leftrightarrow A = Q^*DQ$

דוגמא 3 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ על

$$A^k\cdot\binom{x}{y}=\begin{cases}\binom{x}{y} & k \text{ זוגי}\\ \binom{x}{-y} & k \text{ אי-זוגי}\end{cases}$$

לכל $x,y\neq 0$ על המרחב
$[A^k\binom{x}{y}]$

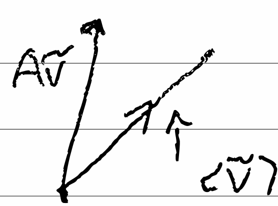
לא מתכנס.

$\tilde v$ וקטור עצמי מקורב

רוצים למצוא $\lambda$ האופטימלי

כך ש: $\|A\tilde v-\lambda\tilde v\|$ מינימלי

$\lambda=\langle\tilde v, A\tilde v\rangle$ $\Leftarrow$




$\|\tilde v\|=1$

מתחילים מ- $v_0$ "אקראי"

מבצעים איטרציות

$$w_{k+1} = A v_k$$

$$v_{k+1} = \frac{w_{k+1}}{\|w_{k+1}\|}$$

$$\mu_{k+1} = \langle w_{k+1} , A w_{k+1} \rangle$$

מתי לעצור?

קובעים $\varepsilon > 0$, נעצור כאשר

יש $\tilde{A}$ כך ש- $\tilde{A} v_k = \mu_k v_k$

ו- $\frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} < \varepsilon$.

ניסוח רוצים לפתור כאשר

$$\varepsilon > \min\left\{ \frac{\|A-\tilde{A}\|}{\|A\|} \;\middle|\; \tilde{A} v_k = \underbrace{\mu_k v_k}_{b} \right\} =$$

$$\left[ \frac{\| A v_k - \mu_k v_k \|}{\|A\| \cdot \|v_k\|} \right] \qquad \text{כאינג}$$

זה שלב באלגוריתם אין צריך

לחשב את $\|A\|_2$

(כמו לחשב את ו"ע) במקום

נשתמש בנורמת פרובניוס:

נורמת $\ell_2$ של $A$ כווקטור ב-

$\mathbb{C}^{n^2}$. (שווה ל- $\|A\|_F$ עפ"י הגדרה בכיתה)

**הערה:** ל- $A-\mu I$ ול- $A$

אותם מרחבים עצמיים ו- λ

ערך עצמי של $A$ נעשה $\lambda-\mu$

ערך של $A-\mu I$

$$Av=\lambda v \qquad (A-\mu I)v = Av-\mu v = (\lambda-\mu)v$$

$$(A-\mu I)^{-1} v = \frac{1}{\lambda-\mu} v$$

אותם מרחבים עצמיים גם ל

$(A-\mu I)^{-1}$ , רק ערך עצמי

$$\frac{1}{\lambda-\mu}$$

אז אם יש $\mu$ כך ש

$$|\lambda_1-\mu| < |\lambda_2-\mu| \le \dots$$

אז אפשר למצוא את הוקטור

העצמי שמתאים ל-$\lambda_1$ על ידי

איטרציות עבור $(A-\mu I)^{-1}$

כלומר על ידי איטרציות

1. לפתור את $(A-\mu I)w_{k+1}=v_k$

$w_k$

$\frac{1}{\lambda_k-\mu}$

$\alpha_{k+1}=\langle v_{k+1}, A v_{k+1}\rangle$ .3

$v_{k+1}=w_{k+1}/\|w_{k+1}\|$ .2

בגדול, אם יש קירוב לערך
עצמי

$(A-\mu I)\underline{x}=0$

לפתור מע״ה לא יציבה
לא (לא הכרח) נע״י כי אמת
מינימלית במרחב העצמי (לו)
נ-x

## אלגוריתם QR

$\begin{pmatrix} * \\ 0 \cdots 0 \end{pmatrix} = \underline{R} = Q^* A Q$

כאשר Q אוניטרית ו-R
משולשת עליונה.

רוצים לנצל סכמה ~

מתחילים $A_0=A$

$$A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k$$

פה:

א. $Q_k$ אוניטרית

ב. $A_k \to R$ כמעט

$R$ מהצורה $\begin{pmatrix} & * & \\ 0 & 0 \dots 0 & \lambda \end{pmatrix}$

תהליך: ( $v_0=e_m$ , $m$ המימד )

1. $w_k^*(A_k - \mu_k I) = e_m^*$
2. $v_k = w_k / \|w_k\|$
3. $Q_k = \left( * \mid v_k \right)$ אוניטרית
4. $A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k$

$$(A_k - \mu_k I) = Q_k R_k \qquad \mathcal{C}$$

$$Q_k R_k \cdot (A_k - \mu_k I)^{-1} = I$$

$$Q_k^* = R_k (A_k - \mu_k I)^{-1}$$

$$e_m^* Q_k^* = e_m^* R_k (A_k - \mu_k I)^{-1} =$$

$$r_0 \cdot e_m^* (A_k - \mu_k I)^{-1} = r_0 w_k = v_k$$

$$R_k = \begin{pmatrix} \ddots & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_0 \end{pmatrix}$$

ב (4)

$$\underbrace{A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k}_{} =$$

$$Q_k^*(A_k - \mu I + \mu I)Q_k =$$

$$\underbrace{Q_k^*(A_k - \mu_k I)}_{R_k} Q_k + Q_k^* \mu_k Q_k =$$

$$R_k Q_k + \mu_k I$$

**אלגוריתם:**

1. למצוא את פירוק QR
של $A_k - \mu_k I$

$$A_k - \mu_k I = Q_k R_k$$

$A_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I$ נקבל .2

אז $\begin{pmatrix} & * & \\ 0 & \cdots 0 & \lambda \end{pmatrix} \leftarrow A_{k+1}$

ומצאנו ערך עצמי [illegible]

עצמי

$v_0$

$A^k v_0$

$w_{n+1}(A - \mu I) = v_n \leftarrow$

$v_{n+1} = w_{n+1} / \|w_{n+1}\|$ $w_{n+1}$

$w_n (A_n - \mu_n I) = e_n$

$A_n - \mu_n I = Q_n R_n \Rightarrow A_{n+1} = R_n Q + \mu I$

$$A_n \to \begin{pmatrix} x & \vert & x \\ x & \vert & x \\ 0 \;\cdots\; 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

המקרה הבסיסי: $\mu_i = 0$ לכל $i$

$$\boxed{\begin{aligned} A_k &= Q_k R_k \\ A_{k+1} &= R_k Q_k \end{aligned}} \quad , A_0 = A.$$

$$(A - \mu I) = QR$$

$$Q = (A - \mu I) R^{-1}$$

$$(A - \mu I)^* = R^* Q^*$$

$$(R^*)^{-1} (A - \mu I)^* = Q^*.$$

$$(A - \mu I) = \underline{Q R}$$

$$I = Q R (A - \mu I)^{-1}$$

$$Q^* = R (A - \mu I)^{-1}$$

$$\underbrace{e_m^* Q^*} = \underbrace{e_m^* R} (A - \mu I)^{-1} =$$

$$e_m^* \cdot \rho (A - \mu I)^{-1} = \underline{\underline{\rho \cdot w_k}}$$

$$\parallel$$

$$v_k$$

$$R = \begin{pmatrix} \nabla & \\ & \rho \end{pmatrix}$$

$$\underline{\rho} > 0$$

המטר' $A$ לכסינה עם ערכים

עצמיים (בע"מ) שונים.

משפט (ווילקינסון): נניח

$|\lambda_1| > \dots > |\lambda_n| > 0$

אז האלכסון של $A_k$ מתכנס

לערכים העצמיים והחלק שמתחת

לאלכסון מתכנס ל-0.

$A_k = Q_k R_k \;,\; A_{k+1} = R_k Q_k$

(כשלא כך) דוגמה:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה:

$$A_k = Q_k R_k$$

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^* \underbrace{Q_k R_k}_{A_k} Q_k =$$

$$Q_k^* A_k Q_k = Q_k^* Q_{k-1}^* \cdots Q_0^* A \underbrace{Q_0 \cdots Q_k}_{U_{k+1}}$$

$$A_k = U_k^* A U_k$$

$$A^k = \underbrace{Q_0 \overbrace{R_0 \cdots Q_0}^{A_1^{k-1}} R_0}_{k} = Q_0 A_1^{k-1} R_0 =$$

$$Q_0 Q_1 A_2^{k-2} R_1 R_0 = \cdots = \underbrace{Q_0 \cdots Q_{k-1}}_{U_k} \underbrace{R_{k-1} \cdots R_0}_{S_k}$$

$$= U_k S_k \Rightarrow U_k = A^k S_k^{-1}$$

$$A_k = S_k A^{-k} \cdot A A^k S_k^{-1} = \underbrace{S_k A S_k^{-1}}$$

$\underbrace{A = XDX^{-1}}$ $\Leftarrow$ לכסינה $A$

$D$ אלכסונית,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A_k = S_k X D X^{-1} S_k^{-1}}$$

גרסה של Bruhat decomposition:

$G$ מטריצה הפיכה $T$

אפשר לפרק כ- $T = L \cdot P \cdot R$

כאשר $L$ משולשת תחתונה, $R$ משולשת

עליונה, $P$ מטריצת פרמוטציה, עבור $P$ יחידה

לרכש

$$X^{-1} = LPR$$

$$A_k = S_k R^{-1} P^{-1} (L^{-1} D L) P R S_k^{-1}$$

$$B_k = P^{-1} D^k L^{-1} D L D^{-k} P =$$

$$W_k = P^{-1} D^k P R S_k^{-1} \qquad \Rightarrow$$

$$A_k = W_k^{-1} B_k W_k \qquad \boxed{\begin{aligned} U_k S_k &= A^k = \\ &X D^k X^{-1} \end{aligned}}$$

$$S_k^{-1} U_k^{-1} =$$

$$W_k = P^{-1} D^k P R S_k^{-1} = \qquad X D^{-k} X^{-1}$$

$$X^{-1} S_k^{-1} = D^{-k} X^{-1} U_k$$

$$P^{-1} (D^k L^{-1} D^{-k}) D^k X^{-1} S_k^{-1} = \cdot$$

$$P^{-1} (D^k L^{-1} D^{-k}) X^{-1} U_k$$

אם $D$ מטריצה אלכסונית

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}(a_{ij})D = \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_j} a_{ij} \right)$$

במקרה שלנו, $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| < 1$ עבור

$i>j$ ולכן זה שואף ל-0 כש-$k \to \infty$.

---

$$B_k = P^{-1} \underbrace{D^k (L^{-1} D L) D^{-k}}_{} P \to$$

$$\underbrace{P^{-1} D P}_{} = \begin{pmatrix} \lambda_{\pi(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{\pi(n)} \end{pmatrix} = D_\pi \qquad P = P_\pi$$

$$A_k = W_k^{-1} B_k W_k =$$

$$\underbrace{W_k^{-1} D_\pi W_k}_{} + \underbrace{W_k^{-1}(B_k - D_\pi) W_k}_{\to 0}$$

[illegible], משולשית
עליונה

על האלכסון של $A_k$

מתכנס ל- $D_\pi$ והחלק מתחת

לאלכסון מתכנס ל- 0.

הוכחת פירוק Bruhat:

$$T = \begin{pmatrix} 0 \cdots a \cdots \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$a \neq 0$

$\Rightarrow \exists R$ משולשית עליונה

$$TR = \begin{pmatrix} 0 \cdots 1 \; 0 \cdots 0 \\ \\ \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \exists L$ משולשית תחתונה

$$LTR = \begin{pmatrix} 0 \cdots & 1 & 0 \cdots 0 \\ & 0 & \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

$\exists P$ תמורה $\Rightarrow$

$$LTRP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & T_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

מאינדוקציה יש $L_1, P_1, R_1$ כך ש

$T_1 = L_1 P_1 R_1$

$LTRP = \tilde{L}_1 \tilde{P}_1 \tilde{R}_1$

P מעבר

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdot 0 \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix}}^{\tilde{R}_1} \cdot \underbrace{P} = P \cdot R_2$$

$R_2$ משולשת עליונה.

---

אז הוכחתי כל מטריצה הפיכה

A אפשר לכתוב כ-

$A = LPU$

כאשר $U$, משולשת עליונה $L$

משולשת תחתונה ו-$P$ תמורה

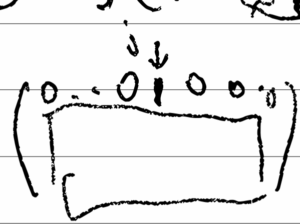
ו-$P$ נקבעת ביחידות.

הכפלה של A מימין במטריצה B

פועלת על העמודות של A

B משולשת עליונה לכן כל עמודה
j ניתן לעשות רק ע"י
עמודות קודמות

הגדרה => בצורה הפוכה ניקח
את העמודה הראשונה j עד
הקואורדינטה הראשונה ≠0 · ועכשיו
להכפיל במטריצה משולשת עליונה U
כך ש:

$AV =$ 

נקח $P'$ $L,U$ כך ש

$$LAU = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ / & / & 0 & / & / & / \\ & & \vdots & & & \\ & & 0 & & & \end{pmatrix}$$

לכן $\exists$ תמורה $P$ כך ש

$$LAUP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

מאינדוקציה

$$A_1 = L_1 P_1 U_1$$

נסמן

$$\tilde{L}_1 = 1 \oplus L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & L_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \Rightarrow LAUP = \tilde{L}_1 \tilde{P}_1 \tilde{U}_1 \Rightarrow$$

$$LAU = \tilde{L}_1 \tilde{P}_1 \underbrace{\tilde{U}_1 P'}$$

טענה: אפשר למצוא $P$ כך ש-

$P(j)=1$ ו- $\tilde{U}_1 \cdot P^{-1} = P'U'$

הוכחה: $P$ מעגל שלוקח את

$j$ ל-1:

$i<j \quad P(i)=i+1$

$P(j)=1 \qquad P(j)=P\cdot e_j \cdots$

$i>j \quad P(i)=i$

$$\tilde{U}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\tilde{U}_1 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \boxed{X} & & 0 & & \boxed{Y} & \\ 0 & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underbrace{P}_{P'^{-1}} \cdot \tilde{U}_1 P^{-1} = \begin{array}{c} \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} X & \vdots & Y \\ 0 \cdots 0 & \bullet & 0 \cdots 0 \\ 0 & \vdots & Z \end{pmatrix} \in$$ מטריצה משולשת

ויחידות חוץ מ- $0$.

---

אלגוריתם QR!

$$\left.\begin{aligned} A_k - \mu_k I &= Q_k R_k \\ A_{k+1} &= R_k Q_k + \mu_k I \end{aligned}\right\} \quad A_{k+1} - \mu_k = R_k Q_k$$

$$A_k \longrightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ 0 \cdots 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$\left(\begin{array}{c|c} B_k & w_k \\ \hline v_k & \lambda_k \end{array}\right)$$

כלומר: $\|v_k\| \to 0$

כמה שיותר מהר.

$$\begin{pmatrix} B_k-\mu_k & w_k \\ r_k & \lambda_k-\mu_k\end{pmatrix} = \overset{Q_k}{\begin{pmatrix} P_k & u_k \\ V_k & \alpha_k\end{pmatrix}}\overset{R_k}{\begin{pmatrix} S_k & t_k\\ 0 & \rho_k\end{pmatrix}} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} B_{k+1}-\mu_k & w_{k+1} \\ r_{k+1} & \lambda_{k+1}-\mu_k\end{pmatrix} = \overset{R_k}{\begin{pmatrix} S_k & t_k\\ 0 & \rho_k\end{pmatrix}}\overset{Q_k}{\begin{pmatrix} P_k & u_k \\ V_k & \alpha_k\end{pmatrix}}$$

$$r_k = V_k \cdot S_k \qquad\qquad r_{k+1} = \rho_k V_k$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$V_k = r_k \cdot S_k^{-1} \qquad\qquad \|r_{k+1}\| \leq |\rho_k| \cdot \gamma_k \cdot \|r_k\|$$

$$\Downarrow$$

$$\|V_k\| \leq \underbrace{\|S_k^{-1}\|}_{\gamma_k} \cdot \|r_k\|$$

$$\begin{pmatrix} S_k & t_k \\ 0 & \rho_k \end{pmatrix} = \overset{Q_k^*}{\begin{pmatrix} P_k^* & v_k^* \\ u_k^* & \bar{\alpha}_k \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} B_k - \mu_k & w_k \\ r_k & \lambda_k - \mu_k \end{pmatrix}$$

$$\rho_k = u_k^* w_k + \bar{\alpha}_k (\lambda_k - \mu_k)$$

$$|\rho_k| \le |u_k \cdot w_k| + \bar{\alpha}_k \underline{(\lambda_k - \mu_k)}$$

נבחר $\mu_k = \lambda_k$ לכ.

$$\underline{|\rho_k|} \le \|u_k\| \cdot \|w_k\| = \|v_k\| \cdot \|w_k\| \le$$

$$\underline{\sigma_k \cdot \|r_k\| \cdot \|w_k\|}$$

$$\|r_{k+1}\| \le \underline{\sigma_k^2 \|w_k\| \|r_k\|^2}$$

• [illegible] של $A_k$

$$\|w_k\| \le \|A_k\| = \|A\|$$

$$A_k = \left(\begin{array}{c|c} B_k & w_k \\ \hline v_k & \alpha \end{array}\right)$$

$\rho,$

$w_k'$

$$\underline{A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k}$$

$$\|A_k\| \ge \|w_k'\| \ge \underline{\|w_k\|} + \alpha^2$$

כי $A$ מטריצה נורמלית $(A^*A = AA^*)$

אז גם $A_k$ ולכן

$$\|w_k\| = \|v_k\|$$

$$A_k^* A_k = \left(\begin{array}{c|c} & v_k^* \\ \hline w_k^* & x \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} & w_k \\ \hline v_k & x \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \|w_k\|^2 + x^2 \end{array}\right)$$

$$A_k A_k^* = \left(\begin{array}{c|c} & w_k \\ \hline v_k & x \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} & v_k^* \\ \hline w_k^* & x \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \|v_k\|^2 + x^2 \end{array}\right) \Rightarrow \|w_k\| = \|v_k\|$$

מסקנה:

$$\|r_{k+1}\| \leq \begin{cases} \sigma_k^2 \|r_k\|^2 \cdot \|A\| & \text{כללי } A \\ \sigma_k^2 \|r_k\|^3 & \text{נורמלית } A \end{cases}$$

האם $\sigma_k$ חסום?

$$\sigma = \|S_k^{-1}\|$$

מ- (1) נובע ש-

$$P_k \cdot S_k = B_k - \mu_k$$

$$S_k^{-1} = (B_k - \mu_k)^{-1} \cdot P_k$$

$$\sigma_k = \|S_k^{-1}\| \leq \|(B_k - \mu_k)^{-1}\| = \frac{1}{\operatorname{sep}(\mu_k, B_k)}$$

$$A_k \qquad \left(\begin{array}{c|c} B_k & w_k \\ \hline v_k & \gamma_k \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{c|c} B & w_k \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right)$$

$$P_k = (B_k - \mu_k) S_k^{-1}$$

---

סוף אזי $\mu_k \to \lambda$

כוח של $A$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\|A_1\| \leq \|A\|$$

---

$$\sigma(B_k) \subseteq \sigma(A_k)$$

$$\not\ni$$

$$\lambda$$

$$\tilde{\lambda}_k \to \lambda$$

$$\mu_k \nearrow$$

$$A_{k+1} = \underline{Q_k^* A_k Q_k}$$

$$W_{n+1}(A - \mu I) = W_n$$

$$\underline{\underline{|\lambda_1 - \mu|}} < |\lambda_2 - \mu|$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda & x \\ \hline & x \end{array}\right)$$

$A$ מטריצה הפיכה $\Leftarrow$

$L$ - משולשת תחתונה

$U$ - משולשת עליונה

$P$ - תמורה

$A = LPU$

$U$ משולשת עליונה $\Leftrightarrow$ $UE_i \subseteq E_i$

לכל $i$, $E_i := \langle e_1, \dots, e_i \rangle$

$L$ משולשת תחתונה $\Leftrightarrow$ $LF_i \subseteq F_i$

לכל $i$, $F_i := \langle e_n, \dots, e_{n-i+1} \rangle$

נניח ש- $L_1 P_1 U_1 = L_2 P_2 U_2$

אז

$$L_1 P_1 U_1 E_i = L_2 P_2 U_2 E_i = L_2 P_2 E_i$$

$$\parallel$$

$$L_1 P_1 E_i$$

$\vdots$

$$L_1(\underline{P_1 E_i \cap F_j}) =$$

$$L_1 P_1 E_i \cap L_1 F_j = L_1 P_1 E_i \cap F_j$$

$$= L_2 P_2 E_i \cap F_j = L_2(\underline{P_2 E_i \cap F_j})$$

שקולים לכל $i,j$ , המימד

של

$\underline{P_1 E_i \cap F_j}$

$P_2 E_i \cap F_j$ שווה למימד של

$$P_1 E_i = \{ e_{\pi_1(1)}, \dots, e_{\pi_1(i)} \}$$

$$\dim(P_1 E_i \cap F_j) = \# \, \pi_1(\{1, \dots, i\}) \cap \{n-j+1, \dots, n\}$$

תרגיל: אם $\pi_1,\pi_2\in S_n$ ולכל $i,j$

$$|\pi_1(\{1,\dots,i\})\cap\{j,\dots,n\}| =$$
$$|\pi_2(\{1,\dots,i\})\cap\{j,\dots,n\}| = a_{ij}$$

צ"ל $\pi_1=\pi_2$

המטרה בשימוש למטריצה:

$A$ היא מטריצה הפיכה

$$a_{ij}=\dim(AE_i\cap F_j)$$

דוגמה: $A$ $2\times 2$:

$AE_1=F_1 \iff A=\begin{pmatrix}0 & x\\ x & x\end{pmatrix}$

אם המטריצה היא

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$\pi(1)=2$
$\pi(2)=1$

אלגוריתם QR:

$$\begin{cases} A_k = \underbrace{Q_k R_k}_{} + \mu_k I \\ A_{k+1} = \underbrace{R_k Q_k}_{} + \mu_k I \end{cases}$$

$n^3$ פעולות כדי לקבל את
צורה המתאימה

כל איטרציה בסדר גודל של $n^3$.

שיפור ל-$n^3$:

1. לעבור לצורה הסנברגית / למטריצה שקולה יותר פשוטה
2. להפעיל אלגוריתם על המטריצה הפשוטה.

$H$ - "מטריצות פשוטות" כך ש-
אם סמוכה מתחת לפחות שני האלכסונים
אז הסכום הוא גדול.

Hessenberg מטריצות

$$H = \underline{\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix}}$$

כלומר

$$H E_i \subseteq E_{i+1}$$

לכל $i$ ($E_i$ כמו קודם)

אם, כ'ם $U$ משולשת עליונה

אז $UH, HU \in \underline{H}$

$$(HU)(E_i) = H(UE_i) = HE_i \subseteq E_{i+1}$$

$$(UH)(E_i) \subseteq U(E_{i+1}) = E_{i+1}$$

אם $A \in \underline{H}$ s/c

$$A_k = Q_k R_k + \mu_k I \Rightarrow Q_k \in \underline{H}$$

$$A_{k+1} = R_k Q_k + \mu_k I \in \underline{H}$$

פירוק $QR$ עבור מטריצות רגרסיה לינארית, וגם כללי ריבועית.

$Q_1, \dots, Q_m$

איך לחשב את (1)?

$$A = Q^* H Q \quad , \quad H \in \underline{H}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & x \\ \hline y & A_1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \underbrace{y \mapsto \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$b = \|y\|$$

$$\left(\begin{array}{c|c} a' & \sim\sim\sim \\ \hline b & \\ 0 & A_1 \\ \vdots & \end{array}\right)$$

טריק לחשב פירוק QR:

בהינתן וקטור $x$ נמצא

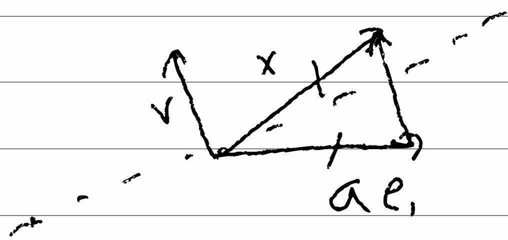
מטריצה אורתוגונלית $Q$ כך ש

$$Qx = a e_1$$

[illegible] בתרון, $|a| = \|x\|$

רעיון- למצוא $Q$ כזאת שהיא

שיקוף.




כ"ל רוצים לשקף ביחס לתת-המרחב

שמאונך ל- $v = x - ae_1$

(כדאי לשמור את הסימן של $a$ הפוך ל-$x_1$)

המטריצה של הטלה אורתוגונלית

לכיוון $v$ נתונה ע"י

$$\frac{v\cdot v^*}{\|v\|^2}$$

$u \perp v \iff v^*\cdot u=0$

$$\underline{(v\cdot v^*)}(u)=0$$

כך $Q$ נתונה ע"י

$$I-\frac{2v\cdot v^*}{\|v\|^2}$$

ניקח $v=x-\sigma e_1$ כאשר

$|\sigma|=\|x\|$

# פתרון נומרי של מערכות פולינומיות

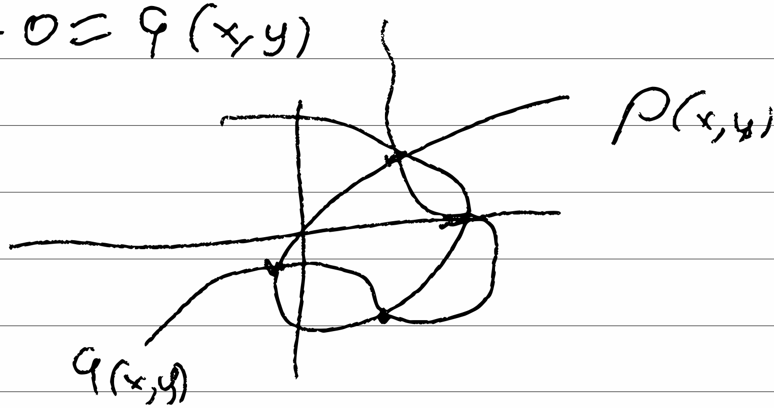
$$P_1(\bar{x})=0, \ldots, P_n(\bar{x})=0$$

$P_i$ פולינום מעל $\mathbb{C}$ במשתנים $\bar{x}$.

$xy=0 \iff x=0$ או $y=0$

$x=0$

$$p(x,y)=0=q(x,y)$$



$p_1, \dots, p_k$

$p_1(\bar{a}) = \dots = p_k(\bar{a})$

אזי יש פולינומים $q_1, \dots, q_k$

כך ש

$\underline{q_1 p_1 + \dots + q_k p_k = 1}$

משפט האפסים של הילברט: זה

שקול לכך שאין פתרונות

(מעל שדה סגור אלגברית).

כדי להפוך לאלגוריתם, צריך
לחסום $q_i$ מלמעלה. אם נדע דרגה
קבועה של ה-$q_i$ זו משוואה במקדמים לינארית

משפט: $\mathbb{C}$ שדה סגור אלגברית.

הוכחה:

$\underline{p(x)=X^n}+\sum_{i<n} a_i x^i$

$\boxed{S_r=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=r\}}$

יהי $\underline{r>0}$ כך ש-$p$ אין שורשים

על המעגל $S_r$ ברדיוס $r$ סביב $0$.

$$p_t(x)=X^n+(1-t)\sum_{i<n} a_i x^i$$

$p_0=p \qquad p_1=X^n$

לכל $t$, לכל $a\in S_r$ $p_t(a)\neq 0$.

$p_t: S_r\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$. נגדיר $\arg f$

עבור $f,g: S_r\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ כאלה יש

הומ' $\underline{H: S_r\times[0,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ כך ש-

$H(a,0)=f(a)$, $H(a,1)=g(a)$

לכל $a\in S_r$ - המגול: זה רציף.

הרעיון: $P \sim P_0$

$P_0(x) = z^n$

נניח בשלילה שב-$P$ אין שורש

כי $P \sim a_0$ $\qquad$ $H(a,t) = P((1-t)\cdot a)$

מקבלים ש- $z \sim z^n$ הומוטופית

לפ' קבועה.

# גאומטריה אלגברית נומרית

מטרה: לפתור מערכת משוואות

פולינומית $p_1(\bar x)=\dots=p_n(\bar x)=0$

רעיון: להתחיל עם מערכת אחרת

$q_1(\bar x)=\dots=q_n(\bar x)=0$ שיודעים לפתור,

ולעשות הומוטופיה עליה

$h(\bar x,t)$

כלומר $h(\bar x,0)=q(\bar x)$ $h(\bar x,1)=p(\bar x)$

כך שנצא $q(\bar x_0)=0$, נגדיר למצוא'

$\bar x(t)$ כך ש- $h(\bar x(t),t)=0$, $\bar x(0)=\bar x_0$

ומכאן $\bar x(1)$ יהיה פתרון של

$p(\bar x)=0$.

$p,q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

דוגמא

$$p_1(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

$$p_2(x,y) = 2y^2 - x = 0$$

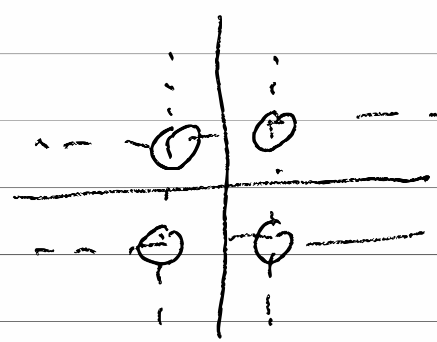
$$q_1(x,y) = \underline{x^2 - 1}, \quad q_2(x,y) = \underline{y^2 - 1}$$

$$h(x,y,t) = (1-t)\cdot \bar{q}(x,y) + t\cdot \bar{p}(x,y)$$

$$\underline{x^2 - 1 = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$(x-1)\cdot(x+1)$$



דוגמא:

$p_1(x,y) = y = 0$

עבור פולינום $r(x)$

$p_2(x,y) = y - r(x)$

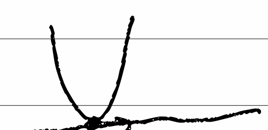
א. $r(x) = x^2+1$

אין פתרונות ב-$\mathbb{R}$ כי $\mathbb{R}$

לא סגור אלגברית. נעבור ל-$\mathbb{C}$

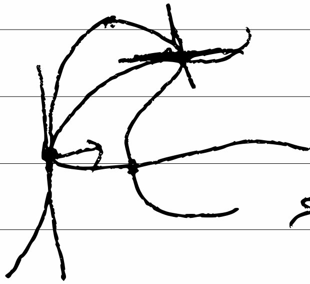
ואז יש 2 פתרונות כמו שמצפים.

ב. $r(x)=x^2$. פתרון אחד



צ. להגדיר ריבוי לכל נקודת חיתוך

ז. לא קורה במקרה כללי



נקודת החיתוך היא

״רעה״ לפי הקריטריון

$\langle \frac{\partial p_1}{\partial x}, \frac{\partial p_1}{\partial y} \rangle$ , $\langle \frac{\partial p_2}{\partial x}, \frac{\partial p_2}{\partial y} \rangle$

תלויים לינארית במקום אחרות

מטריצת היקוביאן $\begin{pmatrix} \partial p_1/\partial x & \partial p_1/\partial y \\ \partial p_2/\partial x & \partial p_2/\partial y \end{pmatrix}$

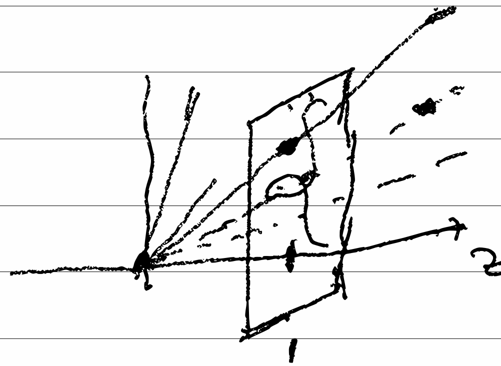
סינגולרית.

ל- $y=x^2$ אין פתרונים עם

המשוואות $y=x$ , $y=0$

אין שקילות חיתוך במישור ולכן יש

במישור הפרויקטיבי (נפגשים ב- ∞)




א. מזהים את מישור $xy$ עם

הקבוצה $U=\{(x,y,z) \mid z=1\}$ ב-$K^3$.

ב. מזהים כל נקודה $p \in U$ עם

הקו הישר שעובר דרך $p, 0$.

ג. נגדיר $\mathbb{P}^n = \{ \ell \subseteq K^{n+1} \mid \ell$ תת-מרחב חד מימדי $\}$

שני הרעיונות הקודמים שלנו מאפשרים

לזהות את המישור עם תת-קבוצה של $\mathbb{P}^2$.

$P(x,y,z)$

$x^2+y^2=1$

$x=\frac{x'}{z}\ ,\ y=\frac{y'}{z} \quad \Rightarrow$

$$\frac{x'^2}{z^2}+\frac{y'^2}{z^2}=1 \quad \Leftrightarrow$$

$P(x,y,z)=$

$x^2+y^2-z^2$

אם $P(x_0,\dots,x_n)$ פולינום הומוגני

אז $P=0$ מגדיר קבוצה

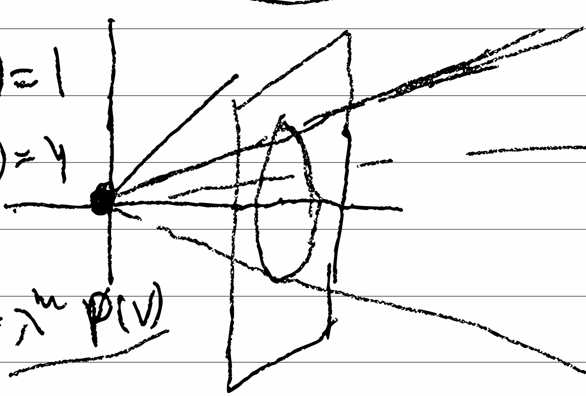
ב- $\mathbb{P}^n$.

$(1,1,1)$

$x'^2+y'^2=0 \quad \Leftarrow \quad z=0$

$p(1,1,1)=1$

$p(2,2,2)=4$



$p(\lambda\cdot v)=\lambda^n p(v)$

$y=0 \qquad y=1$

$y = \frac{y'}{z}$

$y'=0 \qquad y'=z \quad z?$

$z=0$

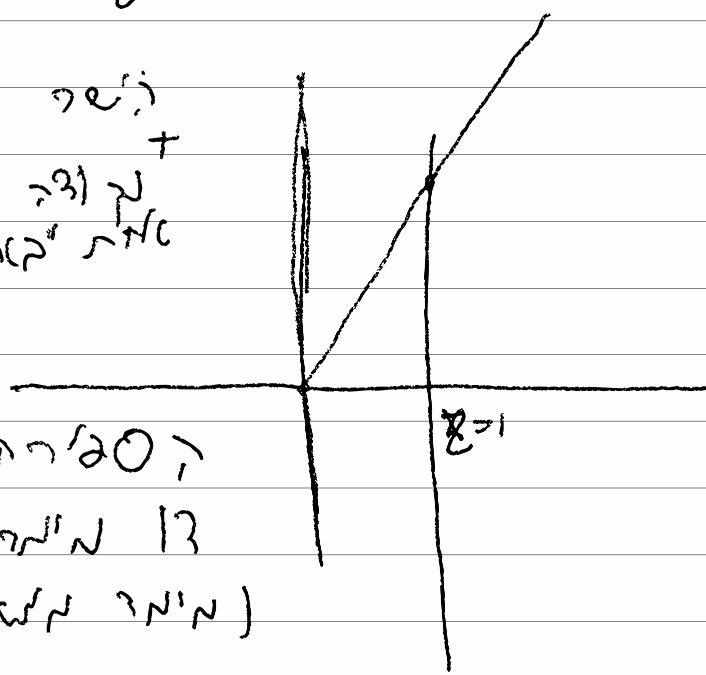
$\mathbb{P}^1 \cong$ ישר + נקודה אחת "באינסוף".

$\|$

הספירה $S^2$

דו מימדית

(מימד ממשי).



<u>משפט בזו:</u> יהיו $n$ פולינומים

הומוגניים $P_1(x_0,\dots,x_n), \dots, P_n(x_0,\dots,x_n)$

מגדירים קבוצות $X_1, \dots, X_n$

ב-$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ שנחתכות נקודתית

(מס' הנקודות בחיתוך סופי)

(והחיתוכים לא מנוונים) אז מספר

הנקודות בחיתוך הוא $d_1 \cdots d_n$

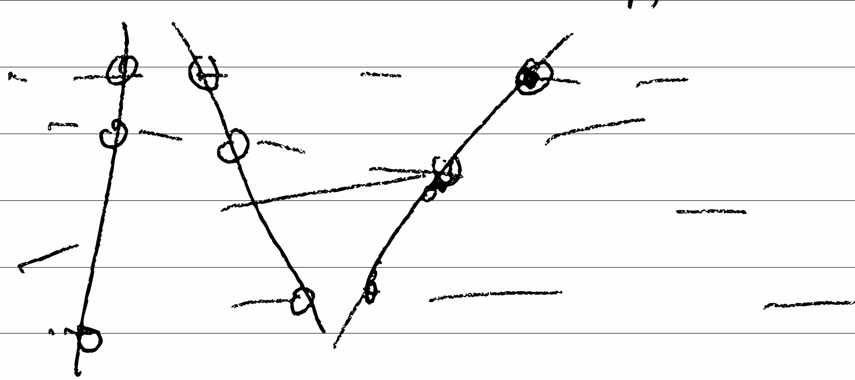
כאשר $d_i$ דרגת ההומוגניות של $P_i$.

אם $n=2$ ו- $P_1, P_2$ מקבילות

אז $d_1$ ו- $d_2$ נוחמ ופלינור״ש

נניח ש- $X$ קבוצת הפתרונות
של $f=0$ ו- $Y$ קבוצת
הפתרונות של $g=0$, אז קבוצת
הפתרונות של $f \cdot g=0$ היא $X \cup Y$

$p_1$



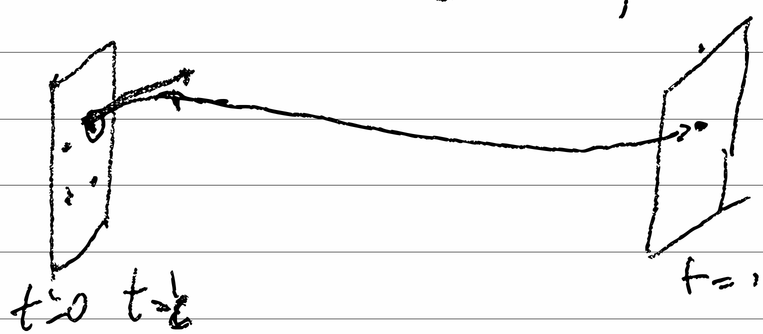
$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$
$$2y^2 - x = 0$$
$$= \bar{P}(x,y)$$

$$x^2 - 1 = 0$$
$$y^2 - 1 = 0$$
$$= \bar{q}(x,y)$$

$$h(x,y,t) = (1-t)\,\bar{q} + t \cdot \bar{P}$$

$y_0 = x_0 = 1$ $\qquad h(x_0, y_0, 0) = 0$

משפט הפונקצי' הסתומה: כלל



$h(x,y,t)=0$

מגדירה את $x,y$ כפ' של $t$

בסביבה של $(x_0,y_0,t_0)$ אם

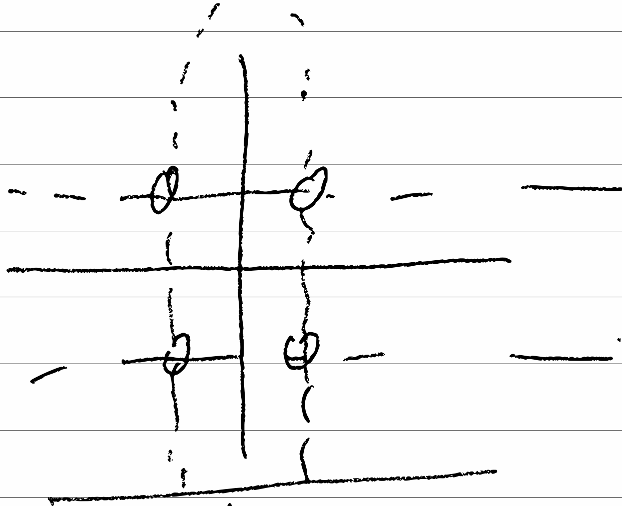
$\begin{pmatrix} \partial h_1/\partial x & \partial h_1/\partial y \\ \partial h_2/\partial x & \partial h_2/\partial y \end{pmatrix}$ לא סינגולרי

אותו דבר שון ל-$\partial t \{0,1\}$

כל שני משטחים שהתנאים של

משפט הפ' הסתומה מוביל

ליריעה (= החיתוך גנרי).



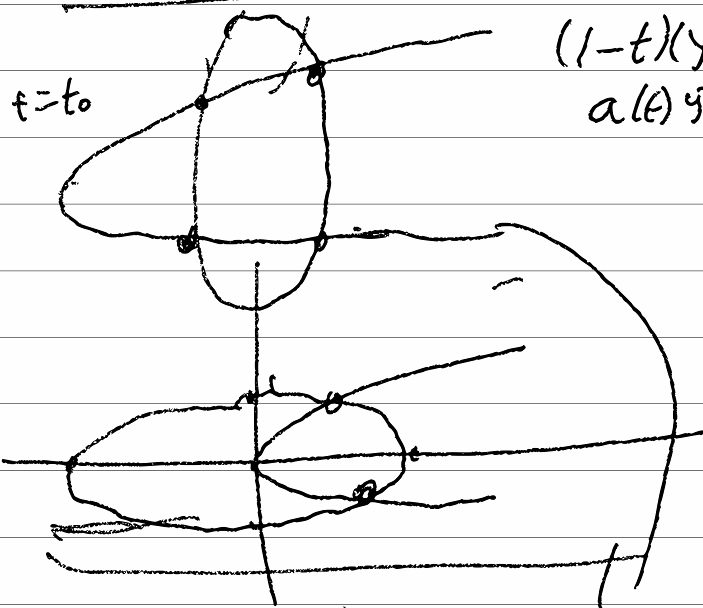
$(1-t)(x^2-1)+$

$t(x^2+4y^2-4)=0$

$\|$

$x^2+4ty^2+t-1-4t=0$

$t=t_0$

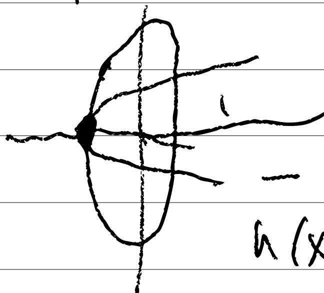


$(1-t)(y^2-1)+t(2y^2-x)=$

$a(t)y^2+b(t)\cdot x=c(t)$

$x^2+4y^2-4=0$

$2y^2-x=0$



במקום, נשתמש
בפרמטר נוסף, $\lambda$

$h(x,y,t)=\lambda(1-t)g+t\cdot p$

$t \in [0,1)$

תרג

$A : U \to V = K^n$

$U = K^m$, $b \in V$

מחפשים את הוקטור $v \in Im(A)$

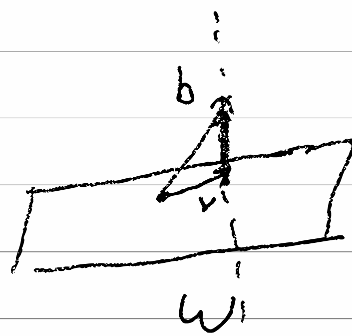
$v = Au$, $Im(A) = W$

הכי קרוב ל-b.

הפתרון של

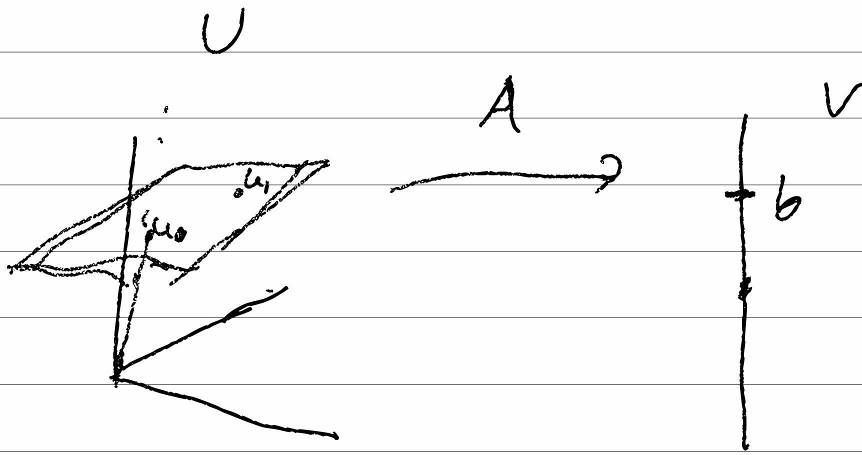
$$\underline{A^* A u = A^* b}$$

$$\boxed{\underline{Im(A)^\perp} = \underline{Ker(A^*)}}$$




$\underline{Au - b} \perp Im(A) = \underline{Ker(A^*)^\perp} \Leftrightarrow$

$A^*(Au - b) = 0$




$u_0 \perp \ker(A)$

$AA^*$

$A: U \to V$

$A^*: V^\vee \to U^\vee$

$\langle A^* v, w \rangle =$

$\langle v, Aw \rangle$

$$Tx=b \quad \begin{cases} T=LU \\ \underline{Ly=b} \end{cases}$$

$T=QR$ Q אורתוגונלית

R משולשת עליונה

$Qy=b \qquad Q^*=Q^{-1}$

$y=Q^*b$

$Rx=y \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$ax_1+bx_2=y_1$

$cx_2=y_2 \Rightarrow \underline{x_2=y_2/c}$

$\pi$ פולינום עם שורשים פשוטים

$$V = \mathbb{F} \Big/ I = \{p\pi \mid p \in \mathbb{F}\}$$

$$\dim(V) = \deg(p)$$

$$T : V \to V \qquad \underline{T(v) = t \cdot v}$$

$$\tilde{T} : \mathbb{F} \to \mathbb{F} \qquad \tilde{T}(v) = t \cdot v$$

$$tI \subseteq I \rightsquigarrow T : V \to V$$

$\alpha$ ערך עצמי של $T$ $\iff$ $T-\alpha$
לא הפיכה. $\iff$ לא חח״ע

נניח ש- $\alpha$ שורש של $\pi$. אזי

$T-\alpha$ לא חח"ע: נגדיר $q = \pi/(t-\alpha)$

אזי $0 \neq \bar{q} \in V$

$$(T-\alpha)\bar{q} = \bar{\pi} = 0$$

---

<u>תרגיל:</u>

$$f_a(x) = X^n + X^{n-1} - a = 0$$

$a > 0$

$n \geq 2$

1. להראות שיש בדיוק שורש חיובי אחד $r(a)$

2. מספר המצב של $r$ כאשר $\frac{1}{n-1}$

1.

$f_a(0) = -a < 0$

$f_a'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} = 0$

$x = 0$ או $nx + n - 1 = 0$

$x = \frac{1-n}{n} < 0$

צריך $r'(a)$

ב. מס' המצב הוא

$$\underline{\mathrm{cond}(r)(a) = \left| \frac{a\, r'(a)}{r(a)} \right|} < \frac{1}{n-1}$$

$F(x,a) = x^n + x^{n-1} - a$

$F(r(a), a) = 0 \quad \overline{r(a)^n + r(a)^{n-1} - a = 0}$

$$r(a)^n + r(a)^{n-1} - a = 0$$

$$r'(a) \cdot n \cdot r(a)^{n-1} + r'(a) \cdot (n-1) r(a)^{n-2}$$

$$1 = 0$$

$$r'(a) = \frac{1}{n r(a)^{n-1} + (n-1) r(a)^{n-2}}$$

$$\frac{a r'(a)}{r(a)} = \frac{a}{n r(a)^n + (n-1) r(a)^{n-1}} =$$

$$\frac{r(a)^n + r(a)^{n-1}}{n r(a)^n + (n-1) r(a)^{n-1}} \leq \frac{r(a)^n + r(a)^{n-1}}{n-1 \left( r(a)^n + r(a)^{n-1} \right)} =$$

$$\frac{1}{n-1}$$

$T_n$ פולינום צ'בישב ה-$n$

מהו הפולינום $T_n \circ T_m$?

פולינום צ'בישב $T_n$; לכל $n \in \mathbb{Z}$

נסתכל על $\varphi_n(z) = z^n$

כפעולה $z \in S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$

היא שומרת על יחס השקילות

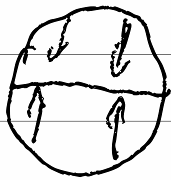
$z \sim \frac{1}{z}$ לכן יש העתקה מושרית

ועל המנה $S^1/\sim \; = [-1,1]$

$\pi(\cdot)$ העתקת המנה היא

$$\pi(z) = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{z+\bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)$$

$$z + \frac{1}{z} = a \iff z^2 + 1 - az = 0$$



$S/C$ $\quad a \sim b$ $\quad$ ec, iv 7 3 $\gamma$

$\Updownarrow$

$a = \frac{1}{b}$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_n(a) & \sim & \varphi_n(b) \\ \| & & \| \\ a^n & & b^n \\ \| & \sim & \\ \frac{1}{b^n} & & \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "\pi"] & S^1 \arrow[d] \\ {[-1,1]} \arrow[r, "T_n"] & {[-1,1]} \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left] & S^1 \arrow[r, "\varphi_m"] \arrow[d] & S^1 \arrow[d] \\
{[-1,1]} \arrow[r, "T_n"] & {[-1,1]} \arrow[r, "T_m"] & {[-1,1]}
\end{tikzcd}
$$

$$\varphi_m \circ \varphi_n = \varphi_{mn}$$

$$T_m \circ T_n = T_{mn}$$ s/c

$$\boxed{T_n\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) = \frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2}}$$

$$T_m\left(\frac{z^n + \frac{1}{z^n}}{2}\right) = \frac{z^{nm} + \frac{1}{z^{nm}}}{2}$$

$f(x) = e^x$ 5c

$$[t, t+1, \ldots, t+n]f = \frac{(e-1)^n}{n!} e^t$$

$$[t]f = f(t) = \frac{(e-1)^0}{0!} e^t$$

$$[t, \ldots, t+n](f) = \frac{[t+1, \ldots, t+n]f - [t, \ldots t+(n-1)]f}{(t+n)-t} =$$

$$\frac{\frac{(e-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{t+1} - \frac{(e-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^t}{n} = e^t \cdot \frac{(e-1)^n}{n!}$$

ש. ולכתם

$$[0,\dots,n](f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \qquad \xi \in (0,n)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ \dfrac{(e-1)^n}{n!} & & \dfrac{e^{\xi}}{n!} \end{array}$$

$$\xi = \log\left((e-1)^n\right) = n\log(e-1)$$

$$\log(e-1) < \frac{1}{2} \qquad \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$e-1 \overset{?}{<} \sqrt{e}$$

$$(e-1)^2 < e \qquad e^2 - 3e + 1 \overset{?}{<} 0$$

נתונה מטריצה הפיכה $A$ $n \times n$

$k>0$ קבוע

למצוא אלגוריתם לפתרון של

$$A^n x = b$$

$n \ll m$

$$Ax = b$$

$$A^{n-1} y = b$$

$QR$

$$Ax = y$$

$A^1$

$$A^{\frac{n}{2}} y = b$$

$$A^{\frac{n}{2}} x = y$$

$$A = Q^* R Q$$

$$A = QR$$

$R^{-1}$

$G(x,y)=0$ $\qquad G(x_0, y_0)=0$

$G_y(x_0, y_0) \neq 0$

$G(x, u(x))=0$

$u_n(x) \to u(x)$ $\quad G_1$

$u_n(x)' \not\to u'$

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

בפעם הקודמת:

$P_1(x_1,\ldots,x_n)=0$

$\vdots$

$P_n(x_1,\ldots,x_n)=0$

מעל $\mathbb{C}$ במרחב הפרויקטיבי

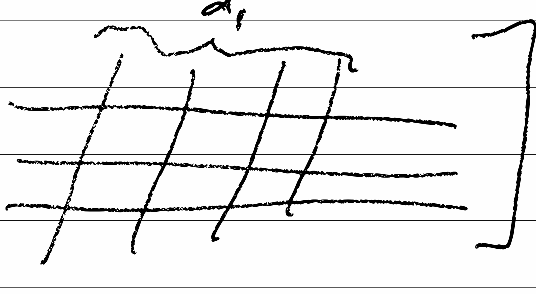
$\mathbb{P}^n \Leftarrow$ מספר הפתרונות הוא

$\prod d_i$

כאשר $d_i=\deg(p_i)$ (מעט כן)

$d_1$

$d_2$



מתחילים ממערכ- משוואות

$a_i=0$

כאשר כל $a_i$ מכפלה של $d_i$

גורמים ליניאריים ומכפלים על

המשפחה

$$\bar{q}\cdot(1-t)(r)+\bar{p}\cdot t$$

3 דוגמא: $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ הפיכה

וקטורים וערכים עצמיים!

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ע"ע $(0,1) \iff b\neq 0$
[illegible]

אפשר להוסיף ויש
המשוואה $x=1$

$$\begin{aligned}
&(1)\quad ax+by=\lambda x\\
&(2)\quad cx+dy=\lambda y\\
&(3)\quad ux+vy=1
\end{aligned}$$

$$x=\frac{x_0}{z},\quad y=\frac{y_0}{z},\quad \lambda=\frac{\lambda_0}{z}$$

$$\Downarrow$$

$z \neq 0$

$0 = a z x_0 + b z y_0 = \lambda_0 x_0 \Leftarrow 2$

$c z x_0 + d z y_0 = \lambda_0 y_0 \Leftarrow 2$

$u x_0 + v y_0 = z \Leftarrow 1$

בכלל: $\varphi$ פתרונות (למע) ר'נ'

$n \times n$ יש $2^n$ פתרונות
(לפי המשפט)

בפרט: לכל ה'א' $n$ פתרונות

$z=0$: $y_0=0$ אז $\lambda_0=0$

$(x_0=0)$

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underline{\underline{\lambda}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

במקום $C$ בע', נו מע'א כך

$$\underline{\underline{\mathbb{P}^1}} \times \mathbb{A}^1 \subseteq \underline{\underline{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}} \subseteq \mathbb{P}^3$$

$$\underbrace{[x;y] \quad \lambda}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha a x_0 + \alpha b y_0 &= \lambda_0 x_0 \\ \alpha c x_0 + \alpha d y_0 &= \lambda_0 y_0 \\ u x_0 + v y_0 &= z \end{aligned}}$$

$$\mathbb{P}^1 = \underline{\mathbb{C} \cup \{\infty\}}$$

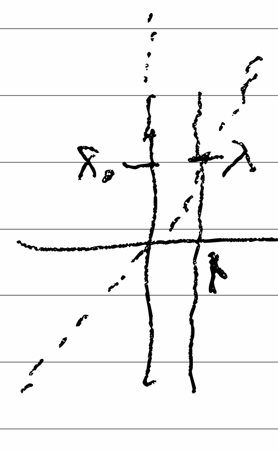
$$\underline{\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}}$$

$$\underline{x = \frac{x_0}{z} \quad y = \frac{y_0}{z}} \qquad \underline{\lambda = \frac{\lambda_0}{\alpha}}$$

$$a\frac{x_0}{\cancel{z}} + b\frac{y_0}{\cancel{z}} = \frac{\lambda_0}{\alpha}\cdot\frac{x_0}{\cancel{z}}$$

$$c\frac{x_0}{\cancel{z}} + b\frac{y_0}{\cancel{z}} = \frac{\lambda_0}{\alpha}\,\frac{y_0}{\cancel{z}}$$

$$u\frac{x_0}{z} + v\frac{y_0}{z} = 1$$



$\{x_1,\dots,x_{n_1}\}, \{x_{n_1+1},\dots,x_{n_2}\},\dots \quad \bar{P}(x_1,\dots,x_n)=0$

$p_i$

$d_i$

מכפלת פולינומים לינאריים

$q_i$ -

שכל אחד מהם תלוי רק בקבוצה

אחת של משתנים

בדוגמא, הקבוצות הן $\{x,y\}$

ו- $\{\lambda\}$

(1) $l_1(x,y)\,l_2(\lambda)=0$

(2) $l_3(x,y)\,l_4(\lambda)=0$

(3) $l_5(x,y)=0$

מספר ההפרעות הוא 2 כמו שקיבלנו

באמת כל $l_i$ גורם לינארי אם

שקדמנו "הכרחי" (בכלל מקדם חופשי)

PUMA רובוט

$$2_{\{x_1,x_2\}} \cdot 4_{\bar{x}} \cdot 2_{\{x_5,x_6\}} =$$

$$16$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

$$x_3^2 + x_4^2 - 1 = 0$$

$$x_5^2 + x_6^2 - 1 = 0$$

$$x_7^2 + x_8^2 - 1 = 0$$

$$a x_1 x_3 - b x_2 x_3 - c x_1 - d x_2 - e x_4 + x_7 - f = 0$$

$$\xi x_1 x_3 + \xi x_2 x_3 + \xi x_1 - \xi x_2 - \xi x_4 - \xi = 0$$

$$x_6 x_8 + \xi x_1 + \xi x_2 = 0$$

$$\xi x_1 + \xi x_2 + \xi = 0$$

חלוקה של המשתנים ל- $\bar{x}$

$$\{x_1, x_2\},\ \boxed{\{x_3, x_4, x_7, x_8\}},\ \{x_5, x_6\}$$

$$l_1(x_1, x_2)\, l_2(x_1, x_2) = 0$$

$$\to l_3(x_3, x_4, x_7, x_8)\, l_4(\bar{x}) = 0$$

$$\to l_5(x_5, x_6)\, l_6(x_5, x_6) = 0$$

$$\to l_7(\bar{x})\, l_8(\bar{x}) = 0$$

$$l_9(x_1, x_2) \cdot l_{10}(\bar{x}) = 0$$

$$l_{11}(x_1, x_2)\, l_{12}(\bar{x}) = 0$$

$$l_{13}(x_1, x_2)\, l_{14}(\bar{x})\, l_{15}(x_5, x_6) = 0$$

$$l_{16}(x_1, x_2) = 0$$

בגרף כללי, עבור המשוואות $p_i$

והחלוקה לקבוצות $s_j$ אז המטריצה

$d_{ij} = \deg(p_i, s_j)$

$D=(d_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}}$ כאשר $S_1,\dots,S_k$

קבוצות השוויון

סכום של:

$per(D) =$

מכפלה של $n_1$

איבחנו מה שהיה ב- $n_2$ אבל

מחבים הגז', .. כי לבחור ולבחור

מחזורים אותם. זה מספר

הפרמננטות (במה שהוא סופי)

$$\text{per}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2_{(1,1)} \cdot 1_{(8,1)} \cdot$$

$$2_{(2,2)} \cdot 2_{(4,2)} \cdot 1 \cdot 1 \cdot$$

$$2 \cdot 1 = 16$$

(חלוקה לשתי קבוצות זרות

מספר האפשרויות לבחור

איבר אחד מכל קבוצה הוא per).

הכלל הי' לא חייבים שקבוצות

במשתנים יהיו זרות

בעיה: אם $A$ מטריצה חיובית

אז

$$\mathrm{per}(A) \approx \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

(לא ידוע אם קיים פולינ׳ דטרמ)

---

מערכת Lotka-Volterra

$$x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 - 7x_1 + 1 = 0 \qquad (x_1)(x_2\ x_3)$$

$$x_2 x_1^2 + x_2 x_3^2 - 7x_2 + 1 = 0 \qquad (x_2)(x_1\ x_3)$$

$$x_3 x_1^2 + x_3 x_2^2 - 7x_3 + 1 = 0 \qquad (x_3)(x_1\ x_2)$$

$$\left.\begin{aligned} \ell_1(x_1)\,\ell_2(x_2,x_3)\,\ell_3(x_2,x_3) &= 0 \\ \ell_4(x_2)\,\ell_5(x_1,x_3)\,\ell_6(x_1,x_3) &= 0 \\ \ell_7(x_3)\,\ell_8(x_1,x_2)\,\ell_9(x_1,x_2) &= 0 \end{aligned}\right] \qquad \bar{q}(x_1,x_2,x_3)$$

$$l_2(x_2, x_3) = a x_2 + b x_3 + c$$

$$l_7(x_3) = d x_3 + e$$

$$\bar{x}_3 = -\frac{e}{d}$$

$$x_2 = \ldots$$

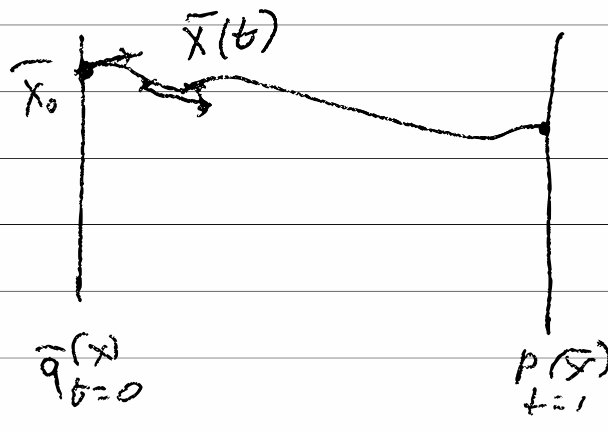
$$F(\bar{x}, t) = q(\bar{x})(1-t) + p(\bar{x})$$

$$F(\bar{x}, 0) = \underline{\bar{q}(\bar{x})}$$

$$F(\bar{x}, 1) = \underline{p(\bar{x})}$$

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

$$\bar{q}(\bar{x}_0) = 0$$



# שיטת דרך מצולע ניוטון

מערכת מהצורה

$$x_1^{n_{11}} x_2^{n_{12}} \cdots x_k^{n_{1k}} = c_1 \in L$$

$$x_1^{n_{21}} x_2^{n_{22}} \cdots x_k^{n_{2k}} = c_2 \in L$$

$$\vdots$$

$$x_1^{n_{k1}} \cdots x_k^{n_{kk}} = c_k \in L$$

$F(\bar{x}, 0)$

$\bar{P}(\bar{x}) = 0$

$F(\bar{x}, t)$

$F(\bar{x}, 1) = \bar{P}$ , $F(\bar{x}, 0)$ — מערכת שקל לפתור

$A=(n_{ij})$

מטריצה מעל $\mathbb{Z}$, כלומר לפרק

$A=B\cdot U$

$U$ משולשת עליונה ו- $\underline{B}$ מעל $\mathbb{Z}$

עם דטרמיננטה $\underline{\pm 1}$

$\det(B_1)=1$

$$\boxed{\begin{array}{l} u,v \ \text{שלמים} \\ au+bv=\gcd(u,v) \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\gcd(u,v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$c=v\ ,\ d=-u$

$1=\underline{ad-bc=-au-bv}$

אם מטריצת שינוי קוורדינאטות

$X_k^{n'_{kk}} = c_k$ חיוביות $n_{kk}$

$X_{k-1}^{n'_{k-1\,k-1}} \; X_k^{n'_{k-1,k}} = c_{k-1}$

$\vdots$

$\Leftarrow$ צ' $|n_{11}| \cdots |n_{kk}| = |\det(U)|$

פתרונות ולכן גם למערכת המקורית זה מספר הפתרונות

$= \boxed{|\det(A)|}$ פתרונות

---

מש 3 לפי ניוטון עבור פולינום:

$$p(x,y) = y^n + a_{n-1}(x)\,y^{n-1} + \dots + a_0(x)$$

$$a_i(x) \in k[x]$$

קריטריון אייזנשטיין אם $a_i(0)=0$

ו- $a_0'(0)\neq 0$ אז $p(x,y)$

אי פריק

[במקום לומר כללי: אם $A$

תחום פריקות יחידה

$$p(x)=x^n+\sum_{i<n} a_i x^i$$

ו- $p$ ראשוני ב-$A$ שמחלק כל $a_i$

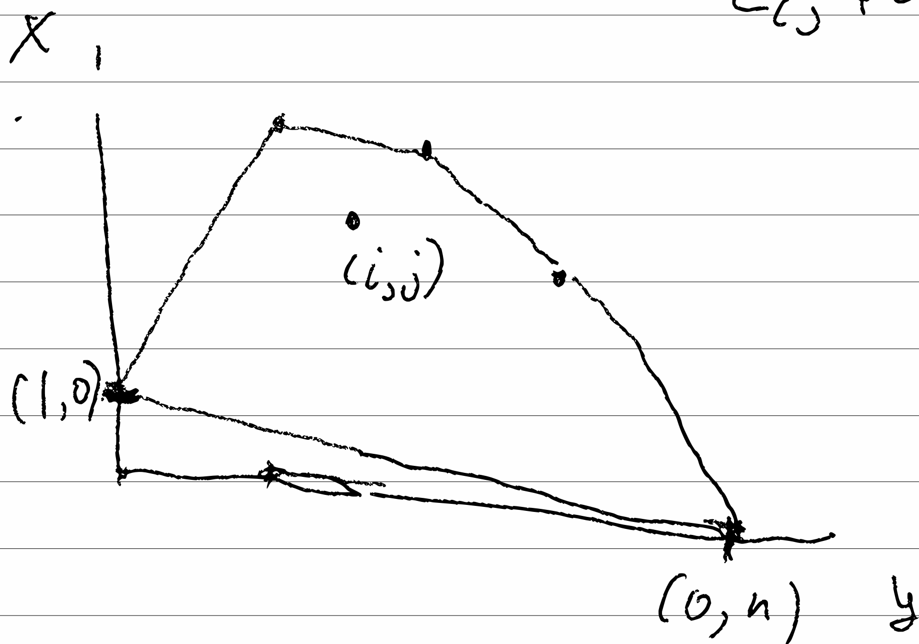
אם בנוסף $p^2$ לא מחלק את $a_0$

אז $p$ א"פ ויהי, UNF מספרים

[$p=x$, $A=k[x]$ fr

$$p(x,y)=\sum c_{ij}x^i y^j \qquad c_{ij}\neq 0$$

$c_{ij} \neq 0$




מצולע ניוטון לפולינום $P(x,y)$ כת׳

מ׳ תנ׳ם הוא הסגור הקמור

של הקבוצת רצ׳ויות $(i,j)$

עבורן המונום $x^iy^j$ מופיע

ב-$P$.

## קריטריון מצולע ניוטון של

P נמצא מעל הצלע שמחברת את $(m,0)$ ל- $(0,n)$ ו- $n,m$ זרים אז P אי פריק

---

פאון ניוטון של פולינום

$p(\bar{x}) = \sum c_{\bar{i}} x^{\bar{i}}$

(כאשר $\bar{i} \in \mathbb{R}^k$) הוא הסגור הקמור של הנקודות $\bar{i}$ שבהן $c_{\bar{i}} \neq 0$.

קודקוד של פאון כמו קודם
איבר של הפאון שאינו נמצא בסגור

הקמור של שתי נקודות שונות

אם $V_p$ פאון ניוטון של פולינום

$p$ אז כל קודקוד שלו שייך ל-

מונום יחיד של $p$.

עובדה: כל פאון הוא הסגור

הקמור של קודקודיו.

אם $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$, סכום מינקובסקי

שלהן הוא הקבוצה

$$X+Y=\{a+b \mid a\in X,\ b\in Y\}$$

טענה: אם $p(\bar{x})=q(\bar{x})r(\bar{x})$ אז

$$V_p = V_q + V_r$$

כיוון שזה הוא פשוט שהקואורדינטות של הנקודות שלו הן אפסות

כיוון שזה הוא אי פריק אז

הוא לא סכום מינקובסקי של פוליטופים שלמים לא טריוויאליים.

אם $V_p$ אי פריק אז $p$ אי פריק.

Gao

X,Y קבוצות קמורות אז X+Y קמורה

$a, b \in X+Y$

$$a = a_x + a_y$$

$$b = b_x + b_y$$

$$ta + (1-t)b \overset{?}{\in} X+Y$$

$$\| $$

$$ta_x + ta_y + (1-t)b_x + (1-t)b_y =$$

$$\underbrace{ta_x + (1-t)b_x}_{X} + \underbrace{ta_y + (1-t)b_y}_{Y}$$

**הוכחה** $p = q \cdot r$

$V_p \subseteq V_q + V_r$

כי אם $\bar{x}^{\bar{i}}$ מונום ב-$p$ אז

יש מונומים $x^{\bar{j}}$ ב-$q$ ו- $x^{\bar{k}}$

ב-$r$ כך ש- $\bar{x}^{\bar{i}} = x^{\bar{j}} \cdot x^{\bar{k}} = x^{\bar{j}+\bar{k}}$

כלומר $\bar{j} \in V_q$ ו- $\bar{k} \in V_r$

$V_q + V_r \subseteq V_p$

אם קודקוד $x$ של $V_q + V_r$ הוא

סכום באופן יחיד של שני

קודקודים $y \in V_q$ ו- $z \in V_r$.

ניקח דרך כך ש- $x = y + z$

$y,z$ הם קודקודים ש' אל

$y = t y_1 + (1-t) y_2$

$t(y_1 + z) + (1-t)(y_2 + z) = x$ אז

לא קיים.

אם $x = y_1 + z_1 = y + z$ אז

$$x = \frac{y_1 + z_1 + y + z}{2} = \frac{y_1 + y}{2} + \frac{z_1 + z}{2} \Rightarrow$$

$$y_1 + y = z_1 + z$$

$$y_1 + z_1 = y + z$$

$$\Downarrow$$

$$y - z_1 = z_1 - y \Rightarrow y = z_1$$